Computerpracticum Differentiaalvergelijkingen, week 4

Aanwijzingen `PPlane`

Dit is een inleidend practicum in het gebruik van `PPlane`. We zullen in dit practicum een aantal functies van het programma oefenen. In het hoor-en werkcollege zullen we opgaven met pen en papier blijven doen. In de inleveropgaven zullen we om faseplaatjes vragen; deze zullen echter m.b.v. `PPlane` gemaakt moeten worden. Met de oefeningen van dit practicum zal dat eenvoudig worden.

We gaan uit van de autonome differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

Voor de duidelijkheid geven we eerst wat definities.

- Een isoclien is een kromme in het (x, y)-vlak waarvoor geldt dat $\dot{x} = 0$ of $\dot{y} = 0$. We spreken over x-isoclienen en y-isoclienen, of ook wel nullijnen.
- In punten waar de isoclienen elkaar snijden dan wel raken, hebben we een evenwicht. Hiervoor geldt dus $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Een evenwicht wordt ook wel rustpunt of stationaire oplossing genoemd.
- Een faseplaatje van een twee dimensionaal systeem toont alle aanwezige rustpunten en een aantal karakteristieke banen. Van belang daarbij is de richting van de baan. Het kan helpen om de isoclienen en de stabiele en instabiele richtingen van zadelpunten te tonen.

Opgaven `PPlane`

Begin met opgave 3 uit hoofdstuk 6 van het stencil. Vergelijk daarna de isoclienen van de hieronder volgende systemen. Merk op dat PPlane de nullijnen kan tekenen; `Solutions` ⇒ `Show nullclines`.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x - y, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$

We gaan nu kijken naar het systeem

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - 6, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 12. \end{cases}$$

Selecteer bij het invullen van de DV in PPlane7 `Nullclines` in plaats van `Arrows`. Interpreteer het resulterende plaatje. Bereken een stationair punt van het systeem en vergelijk deze met het plaatje. Controleer dit met de uitkomst van `Solutions` ⇒ `Find an equilibrium point`. Doe hetzelfde voor het volgende systeem:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 4, \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

We passen nu het bovenstaand systeem aan tot:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 4, \\ \dot{y} = x - y^2 + a. \end{cases}$$

Hier is a een parameter. Onderzoek het aantal evenwichten voor verschillende a. Laat zien dat er zeven kwalitatief verschillende faseplaatjes zijn.

Maak nu opgave 2.10.6 uit het boek. Bedenk bij (e) zelf een goed voorschrift voor de functies f en g. Sla de opmerking over Poincaré-Bendixson over.

Inleveropgaven

De inleveropgaven zijn DE 2.10.1 en E9 (hieronder te vinden).
Hint bij 2.10.1.c : Elimineer de tijd door bijvoorbeeld dx/dy te bestuderen.

Opgave E9

Beschouw het volgende prooi-roofdier systeem.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \dfrac{xy}{1 + \alpha x}, \\ \dot{y} = -y - \delta y^2 + \dfrac{xy}{1 + \alpha x}, \end{cases}$$

met $\alpha,\ \delta$ beide positieve parameters.

(a) Leid de exacte vergelijkingen af voor nullijnen van het systeem.

(b) Hoeveel niet negatieve evenwichten, dus $x,\ y \geq 0$, heeft het systeem?

(c) Leid een relatie af tussen α en δ zodat er precies één (gedegenereerd) positief evenwicht bestaat voor het systeem.

(d) Schets m.b.v. `PPlane`, voor $\alpha = 1/2$ minstens drie kwalitatief verschillende fase plaatjes in het domein $x, y \geq 0$.