Deeltentamen differentiaalvergelijkingen 15 april 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Wilfred de Graaf (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Timo Kluck (groep 3).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[35]** Bepaal alle oplossingen $(y, z) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ van het lineaire systeem

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y &= 0 \\ \ddot{z} - 2\dot{z} + 2y &= 0 \end{aligned}$$

van tweede orde differentiaalvergelijkingen.

2. **[35]** Voor het systeem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + by_2 \\ \dot{y}_2 &= cy_1 \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen wordt in deze opgave het bifurcatiediagram geconstrueerd.

(*i*) Zet het systeem om in een differentiaalvergelijking $\dot{y} = Ay$ en geef de matrix A expliciet aan.

(*ii*) Bereken $\mathrm{Sp}A$, $\det A$ en de discriminant Δ van de karakteristieke veelterm van A in termen van de parameters b en c.

(*iii*) Teken $\det A = 0$ en $\Delta = 0$ in het (b, c)–vlak.

(*iv*) Geef voor elke van de 6 open regio's in het (b, c)–vlak een faseportretje. *Hint:* gebruik de eigenwaarden.

3. **[15]** Beschouw op $\mathbb{R}^2$ de stroming $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\varphi_t(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} x\cos((x^2+y^2)t) \;-\; y\sin((x^2+y^2)t) \\ x\sin((x^2+y^2)t) \;+\; y\cos((x^2+y^2)t) \end{pmatrix} \quad .$$

   (*i*) Geef de evenwichtspunten en bepaal hun stabiliteit.

   (*ii*) Bepaal het aantal injectieve banen.

   (*iii*) Bereken het vectorveld $f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial t}\,\varphi_t(x,y)\Big|_{t=0}$ van de stroming

4. **[15]** In de niet-autonome scalaire differentiaalvergelijking $\dot{y} = f(t) \cdot y$ zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en periodiek met minimale periode τ. Laat zien dat dan en slechts dan alle oplossingen van deze vergelijking voor alle $t \in \mathbb{R}$ aan $y(t+\tau) = y(t)$ voldoen als

$$\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 0 \ .$$