Functionaalanalyse

Heinz Hanßmann

Utrecht, 2007/8

Contents

1

Inleiding

Zie ook §§1.1 en 1.2 in [Saxe], §§1.2 en 2.1 in [Zeidler], §§1.0, 1.1 en 1.2 in [Young], §§2.1 en 3.1 in [Rynne and Youngson], §§5.1, 6.1 en 6.2 in [Dieudonné] of §§1.2 en 1.3 in [Teschl].

Definitie 1.1. Zij E een vectorruimte over $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$). Een functie $\|..\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ noemen we een norm op E als

(i) $\|x\| \geq 0$ *voor alle* $x \in E$.
(ii) $\|x\| = 0$ *dan en slechts dan als* $x = 0$.
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *voor alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *en alle* $x \in E$.
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *voor alle* $x, y \in E$.

We noemen E voorzien met een norm een genormeerde ruimte.

Stelling 1.2. Zij E een genormeerde ruimte. Dan definieert $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ een metriek op E.

Definitie 1.3. Twee normen $\|..\|$ en $|\|..\||$ op een vectorruimte E zijn equivalent als er reële getallen $m, M > 0$ bestaan met

$$\bigwedge_{x \in E} \quad m \, \|x\| \;\leq\; |\|x\|| \;\leq\; M \, \|x\| \;\; .$$

Definitie 1.4. Zij E een $\mathbb{K}$–vectorruimte. Een functie $\langle .. \mid .. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ noemen we een inproduct op E als

(i) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ *voor alle* $x \in E$.
(ii) $\langle x \mid x \rangle = 0$ *dan en slechts dan als* $x = 0$.
(iii) $\langle \lambda x + y \mid z \rangle = \lambda \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$ *voor alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *en alle* $x, y, z \in E$.
(iv) $\langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}$ *voor alle* $x, y \in E$.

We noemen E dan een inproductruimte.

Stelling 1.5. Zij E een inproductruimte. Dan is $\langle .. \mid .. \rangle$ semi-lineair in het 2de argument.

Stelling 1.6. (ongelijkheid van Cauchy–Schwarz). Zij E een inproductruimte. Dan is $|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ voor alle $x, y \in E$.

Voorbeelden van genormeerde ruimten zijn

$$\ell^p \quad := \quad \left\{ \; a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \middle| \quad \|a\|_p < \infty \; \right\}$$

met $\|a\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ en $\|a\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ (voor $p = 2$ is de norm afkomstig van een inproduct). De supremum-norm $\|f\|_\infty := \sup_x |f(x)|$ is een norm op

$$C_0(\mathbb{R}^n) \quad := \quad \left\{ \; f \in C(\mathbb{R}^n) \quad \middle| \quad \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0 \; \right\}$$

en op $C[0,1]$, deze laatste ruimte kan men ook met de (niet equivalente) normen

$$\|f\|_1 \quad := \quad \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

en $\|..\|_2$ voorzien, waarbij $\|..\|_2$ afkomstig is van het inproduct

$$\langle f \mid g\rangle \quad := \quad \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad .$$

2

Topologie van metrische ruimten

Zie ook §§2.1, 2.2, 2.3 en 6.5 in [Saxe], §§1.3, 1.6, 1.20 en 1.21 in [Zeidler], §§2.0, 3.0, 6.0, 7.0 en 7.1 in [Young], §§1.2, 2.3, 4.1, 4.2 en 4.3 in [Rynne and Youngson], §§3.14, 10.1, 5.4, 5.5 en 5.7 in [Dieudonné] of §§1.1, 1.2, 1.4 en 1.5 in [Teschl].

Definitie 2.1. Zij V een metrische ruimte. Een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij als

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \quad \bigvee_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}} \quad \bigwedge_{m,n\geq n_\varepsilon} \quad \mathrm{d}(x_n, x_m) \ < \ \varepsilon \ .$$

Definitie 2.2. We noemen de metrische ruimte V compleet als elke Cauchy-rij in V convergent is.

Stelling 2.3. (dekpuntstelling van Banach). Zij V een complete metrische ruimte en $f : V \longrightarrow V$ een continue contractie (d.w.z. Lipschitz-continu met Lipschitz-constant $\gamma < 1$). Dan heeft f een uniek dekpunt $y = f(y) \in V$, voor elke $x_0 \in V$ is $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = y$ en geldt de schatting

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad \mathrm{d}(y, f^n(x_0)) \ \leq \ \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\mathrm{d}(f(x_0), x_0) \ .$$

Definitie 2.4. We noemen een genormeerde ruimte E een Banachruimte als E compleet is t.o.v. de bijbehorende metriek. Indien die norm afkomstig is van een inproduct spreken we ook van een Hilbertruimte.

Stelling 2.5. Zij E een Banachruimte en $F < E$ een gesloten deelruimte. Dan zijn F en de quotientruimte $E/_F$ ook Banachruimten.

Bewijs. De beperking van $\|..\|$ op F is (blijkbaar) een norm op F en we moeten alleen nog laten zien dat F compleet is.

Zij hiervoor $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in F. Dus ook in E, en E is compleet, er bestaat een limiet $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$. Maar $F \subseteq E$ is gesloten en bevat dus y, waarmee de gegeven Cauchy-rij binnen F een limiet heeft.

Op E definieert men d.m.v. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F$ een equivalentierelatie (oefening: ga dit na!) waarvoor de equivalentieklassen de vorm

$$\left\{ y \in E \;\middle|\; y \sim x \right\} = \left\{ x + z \;\middle|\; z \in F \right\} =: x + F$$

hebben. De verzameling van alle equivalentieklassen is het quotient

$$E/F = \left\{ x + F \;\middle|\; x \in E \right\}$$

waarop door

$$\begin{aligned} (x+F) + (y+F) &:= (x+y) + F \\ \lambda \cdot (x+F) &:= (\lambda x) + F \end{aligned}$$

optellen en scalair vermenigvuldigen gedefinieerd worden. (Oefening: ga na dat deze definities onafhankelijk van de gekozen representanten zijn, en dat hiermee het quotient een vektorruimte wordt.) D.m.v.

$$\|x + F\| := \inf_{y \sim x} \|y\|$$

(dus de afstand tussen de verzamelingen $x + F \subseteq E$ en $F \subseteq E$) wordt een norm op het quotient gedefinieerd.

(i) Als infimum van getallen ≥ 0 is $\|x + F\| \geq 0$.

(ii) Indien $\|x+F\| = 0$, dan bestaat voor elk $\varepsilon > 0$ een $y \sim x$ met $\|y\| < \varepsilon$. Neem $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ en verkrijg een rijtje $(y_n)_n$ in $x + F$ met $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Maar met F is ook $x + F$ gesloten (invers beeld van F onder de translatie $z \mapsto z - x$), dus $0 \in x + F$, d.w.z. $0 \sim x$ ofwel $x + F = F$, de nul in het quotient.

(iii) $\|\lambda \cdot (x + F)\| = \|(\lambda x) + F\| = \inf\limits_{z\sim\lambda x} \|z\| = \inf\limits_{y\sim x} \|\lambda y\| = |\lambda| \inf\limits_{y\sim x} \|y\|$.

(iv) $\|(x+F)+(y+F)\| = \inf\limits_{z\sim(x+y)} \|z\| \overset{!}{=} \inf\limits_{u\sim x} \inf\limits_{v\sim y} \|u+v\| \leq \inf\limits_{u\sim x} \|u\| + \inf\limits_{v\sim y} \|v\|$.

Zij tenslotte $(x_n + F)_n$ een Cauch-rij in E/F, d.w.z.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{n(\varepsilon)\in\mathbb{N}} \; \bigwedge_{m,n\geq n(\varepsilon)} \quad \|x_n - x_m + F\| \leq \varepsilon$$

en dat betekent wederom dat $y^\varepsilon_{nm} \sim (x_n - x_m)$ bestaan met $\|y^\varepsilon_{nm}\| \leq 2\varepsilon$. Helaas kunnen we niet ervan uitgaan dat $y_{nm} = y_n - y_m$ met $y_n \sim x_n$ en $y_m \sim x_m$. Zoiets gaan we nu construeren, en daarbij is het ‘toegestaan’ om tot een deelrij over te stappen.

Werk met $\varepsilon = \dfrac{1}{2^{k+1}}$, stel $n_k := n(\dfrac{1}{2^{k+1}})$ en schrijf $y^k_{nm} := y^\varepsilon_{nm}$ voor $n, m \geq n_k$. Definieer nu $y_{n_1} = x_{n_1}$ en vervolgens recursief $y_{n_{k+1}} = y_{n_k} + y^k_{n_k+1,n_k}$. Dan is $y_{n_k} \sim x_{n_k}$ en

$$\|y_{n_{k+l}} - y_{n_k}\| \;\leq\; \sum_{j=0}^{l-1} \|y_{n_{k+j+1}} - y_{n_{k+j}}\| \;\leq\; \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{k+l-1}} \;\leq\; \frac{1}{2^{k-1}} \;,$$

ofwel $(y_{n_k})_k$ is een Cauchy-rij. In de complete ruimte E bestaat de limiet $z = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$ en dan is

$$z + F \;=\; \lim_{k\to\infty} y_{n_k} + F \;=\; \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} + F) \;.$$

Omdat $(x_n + F)_n$ een Cauchy-rij is en (nu) een convergente deelrij heeft moet ook de hele rij convergeren, met dezelfde limiet $z + F$. $\square$

Stelling 2.6. Voor een lineaire afbeelding $T : E \longrightarrow F$ tussen genormeerde ruimten zijn de volgende uitspraken equivalent.

(*i*) *T is Lippschitz-continu.*
(*ii*) *T is in het nulpunt $0 \in E$ continu.*

Stelling 2.7. De ruimte $L(E, F)$ van begrensde operatoren is een genormeerde ruimte. Als F een Banachruimte is dan is ook $L(E, F)$ een Banachruimte.

Definitie 2.8. We noemen $E^* = L(E, \mathbb{K})$ de duale ruimte *en $E^{**} = L(E^*, \mathbb{K})$ de* biduale ruimte. *Indien $E = E^{**}$ noemen we de Banachruimte E* reflexief.

3

Meetkunde van Hilbertruimten

Zie ook §§5.1–5.4 en 4.1–4.3 in [Saxe], §§2.9–2.11 en 3.1–3.5 in [Zeidler], §§3.1, 3.2, 4.0, 4.1, 4.3, 4.4, 5.0 en 5.3 in [Young], §§3.1–3.5 in [Rynne and Youngson], §§6.3, 6.5 en 6.6 in [Dieudonné] of §§2.1 en 2.2 in [Teschl].

Stelling 3.1. Zij H een Hilbertruimte, $x \in H$ en $F < H$ een gesloten deelruimte. Dan bestaat precies één $z \in F$ met

$$\|x - z\| \quad = \quad \inf_{y \in F} \|x - y\| \ .$$

Definitie 3.2. Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Dan schrijven we

$$F^{\perp} \quad = \quad \left\{ w \in H \;\middle|\; \langle w \mid y \rangle = 0 \text{ voor alle } y \in F \right\}$$

voor de deelruimte loodrecht op F.

Stelling 3.3. Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Dan is $H = F \oplus F^{\perp}$.

Stelling 3.4. (Riesz). Zij H een Hilbertruimte. Voor elke begrensde lineaire vorm $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{K}$ bestaat precies één $y \in H$ met $\alpha(x) = \langle x \mid y \rangle$ voor alle $x \in H$:

$$\bigwedge_{\alpha \in H^*} \ \overset{1}{\bigvee_{y \in H}} \ \bigwedge_{x \in H} \quad \alpha(x) = \langle x \mid y \rangle \ .$$

Definitie 3.5. Een systeem $(e_k)_k$ van vectoren in een inproductruimte noemen we een orthonormaalsysteem als

$$\langle e_k \mid e_l \rangle \quad = \quad \delta_{kl} \quad = \quad \begin{cases} 1 \text{ als } k = l \\ 0 \text{ als } k \neq l \end{cases} \ .$$

Stelling 3.6. Zij H een Hilbertruimte met daarin een orthonormaalsysteem $(e_k)_k$. Dan is de reeks $z = \sum \lambda_k e_k$ dan en slechts dan de ontbinding van een element $z \in H$ als $\lambda_k = \langle z \mid e_k \rangle$ en $(\lambda_k)_k \in \ell^2$.

Stelling 3.7. (en definitie). Voor een orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in een Hilbertruimte H zijn de volgende uitspraken equivalent.

- *(i)* $\overline{< e_k \mid k \in \mathbb{N} >} = H$.
- *(ii)* *$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is een maximaal orthonormaalsysteem.*
- *(iii)* *Als $\langle x \mid e_k \rangle = 0$ voor alle $x \in H$ dan is $x = 0$.*
- *(iv)* *Voor alle $x \in H$ geldt $\|x\|^2 = \sum |\langle x \mid e_k \rangle|^2$.*
- *(v)* *Voor alle $x \in H$ geldt $x = \sum \langle x \mid e_k \rangle e_k$.*

We noemen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dan een volledig orthonormaalsysteem *van H.*

Stelling 3.8. De verzameling $\{ \mathbb{1}, \sqrt{2}\cos 2\pi kt, \sqrt{2}\sin 2\pi kt \mid k \in \mathbb{N} \}$ vormt een volledig orthonormaalsysteem van $L^2[0,1]$.

Definitie 3.9. Een afbeelding $U : H \longrightarrow G$ tussen Hilbertruimten is unitair *als U lineair en surjectief is en voor alle $x, y \in H$ geldt dat $\langle Ux \mid Uy \rangle = \langle x \mid y \rangle$. We noemen H en G dan* unitair equivalent.

4

Compacte verzamelingen

Zie ook §§2.1 en 6.1 in [Saxe], §§1.11, 1.12 en 1.26 in [Zeidler], §§2.1 en 5.4 in [Young], §§1.2, 2.2 en 2.3 in [Rynne and Youngson], §§3.16, 3.17, 7.1. en 7.3–7.5 in [Dieudonné] of §§1.1, 2.4 en 7.3 in [Teschl].

Definitie 4.1. *Een (deelverzameling van een) metrische ruimte V is compact als elke overdekking $(U_i)_{i\in I}$ door open verzamelingen een eindige deeloverdekking $V \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ bevat en precompact als er voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige overdekking $V \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup U_\varepsilon(x_n)$ bestaat.*

Stelling 4.2. *Voor een metrische ruimte V zijn de volgende uitspraken equivalent.*

- *(i)* *V is compact.*
- *(ii)* *V is compleet en precompact.*
- *(iii)* *V is rij-compact, d.w.z. elke rij in V heeft een convergente deelrij.*

Stelling 4.3. *Alle normen op $\mathbb{K}^n$ zijn equivalent.*

Stelling 4.4. *Zij E een genormeerde ruimte en $\overline{U_1(0)} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ compact. Dan heeft E eindige dimensie.*

Stelling 4.5. *(Arzelà–Ascoli). Zij V een compacte metrische ruimte. Dan is $M \subseteq C(V)$ dan en slechts dan compact, als M gesloten, begrensd en uniform equicontinu is.*

Stelling 4.6. *(Stone–Weierstraß). Zij V compact en $D \subseteq C(V, \mathbb{R})$ met*

- *(i)* *D bevat een constante functie,*
- *(ii)* *D separeert de punten in V.*

Dan ligt de door D voortgebrachte algebra A dicht in $C(V, \mathbb{R})$.

Gevolg 4.7. *Zij V compact en $D \subseteq C(V, \mathbb{C})$ met (i), (ii) en bovendien*

- *(iii)* *Voor alle $f \in D$ is ook $\bar{f} \in D$.*

Dan ligt de door D voortgebrachte algebra A dicht in $C(V, \mathbb{C})$.

Lemma 4.8. Gegeven $X, Y \subseteq V$ met $X \cap Y = \emptyset$ en $\delta > 0$. Dan bestaat $g \in A$ met

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ *voor alle* $x \in V$.
(ii) $g(x) \leq \delta$ *voor alle* $x \in X$.
(iii) $g(x) \geq 1 - \delta$ *voor alle* $x \in Y$.

Lemma 4.9. Zij $z \in V$ en $U \subseteq V$ een open omgeving van z. Dan bestaat een open omgeving $W \subseteq U$ van z zodanig, dat er voor elk $\varepsilon > 0$ een $g \in A$ is met

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ *voor alle* $x \in V$.
(ii) $g(x) \leq \varepsilon$ *voor alle* $x \in W$.
(iii) $g(x) \geq 1 - \varepsilon$ *voor alle* $x \in V \setminus U$.

Stelling 4.10. Zij V een compacte metrische ruimte. Dan is $C(V)$ separabel.

5

Begrensde operatoren

Zie ook §§5.1–5.3 in [Saxe], §§1.20, 1.23 en 1.25 in [Zeidler], §§7.0, 7.2 en 7.5 in [Young], §§4.1–4.4 en 5.3 in [Rynne and Youngson], §11.1. in [Dieudonné] of §7.1 in [Teschl].

Stelling 5.1. Zij E een Banachruimte, dan is $L(E) := L(E,E)$ een Banachalgebra met één.

Stelling 5.2. Zij E een Banachruimte en $T \in L(E)$. Dan is de kern (of nulruimte)

$$N(T) \quad := \quad \ker T \quad := \quad T^{-1}(0) \quad = \quad \left\{ x \in E \;\middle|\; T(x) = 0 \right\}$$

van T een gesloten deelruimte en T induceert een lineaire continue bijectie tussen $E/_{\ker T}$ en het beeld

$$R(T) \quad := \quad \operatorname{im} T \quad := \quad T(E) \quad = \quad \left\{ y \in E \;\middle|\; y = T(x) \text{ voor een } x \in E \right\}$$

onder T.

Stelling 5.3. De inverteerbare elementen van een Banachalgebra A vormen een open deelverzameling van A.

Definitie 5.4. Zij A een complexe Banachalgebra met 1 en $T \in A$. Dan noemt men

$$\sigma(T) \quad := \quad \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \lambda - T \text{ niet inverteerbaar} \right\}$$

het spectrum van T.

Stelling 5.5. Zij A een complexe Banachalgebra met 1 en $T \in A$. Dan is het spectrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ compact.

Bewijs. De niet inverteerbare elementen van A vormen een gesloten deelverzameling (want het complement is open), en $\sigma(T)$ is invers beeld hiervan onder de continue afbeelding

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \mapsto & \lambda - T \end{array}$$

en dus eveneens gesloten. Maar $\sigma(T)$ is ook begrensd, want als $|\lambda| > \|T\|$ dan is

$$\|\frac{T}{\lambda}\| \quad = \quad \frac{\|T\|}{|\lambda|} \quad < \quad 1$$

en daarmee $\lambda - T = (1 - \frac{T}{\lambda})\lambda$ inverteerbaar. Een begrensde gesloten deelverzameling van $\mathbb{C}$ is compact. □

Stelling 5.6. (en definitie). Voor een element $T \in A$ van een Banachalgebra is

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad = \quad \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

waarbij A voor de tweede identiteit een complexe Banachalgebra met 1 moet zijn. Men noemt dit de spectraalstraal van T en schrijft hiervoor $\rho(T)$.

Gevolg 5.7. $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Bewijs. (van het stelling-gedeelte). In de Banachalgebra A is $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Gegeven $p \in \mathbb{N}$ bestaan er $q, r \in \mathbb{N}$ met $m = pq + r$ en $0 \leq r < p$, met als gevolg

$$\|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \|T^p\|^{\frac{q}{m}} \cdot \|T\|^{\frac{r}{m}}$$

en vanwege

$$\lim_{m\to\infty} \frac{q(m)}{m} \quad = \quad \frac{1}{p} \quad \text{en} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{r(m)}{m} \quad = \quad 0$$

verder

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad = \quad \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Dit geldt voor alle $p \in \mathbb{N}$, dus

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \inf_{p\in\mathbb{N}} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \inf_{p\geq m} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \quad = \quad \liminf_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$$

waaruit volgt dat deze getallen aan elkaar en aan $\lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ gelijk zijn, schrijf hiervoor al $\rho(T)$. De aanscherping van het bewijs van stelling 5.5 m.b.v. opgave 23 levert nog

$$\sigma(T) \quad \subseteq \quad \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq \rho(T) \right\}$$

op.

Indien T inverteerbaar is geldt $1 \leq \|T^m\| \cdot \|T^{-m}\| \leq \|T^m\| \cdot \|T^{-1}\|^m$, d.w.z.

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \quad \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\geq\; \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

en dus $\rho(T) \geq \dfrac{1}{\|T^{-1}\|} > 0$. Is omgekeerd $\rho(T) = 0$, dan volgt $\sigma(T) = \{0\}$ en we mogen vanaf nu $\rho(T) \neq 0$ veronderstellen. Om te bevestigen dat de spectraalstraal overeenkomt met de straal van de kleinste schijf rond 0 die het hele spectrum bevat argumenteren we uit het ongerijmde.

$$\text{Stel dat} \qquad \bigwedge_{\lambda \in \sigma(T)} \quad |\lambda| \;<\; \rho(T) \ . \tag{5.1}$$

Dan is de functie $S(\mu) := (1 - \mu T)^{-1}$ op heel

$$U \;\;=\;\; \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu| \leq \frac{1}{\rho(T)} \right\}$$

gedefinieerd en continu, dus uniform continu op deze compacte verzameling:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \quad \bigvee_{\delta > 0} \quad \bigwedge_{\lambda, \mu \in U} \quad |\lambda - \mu| \;<\; \delta \;\;\Rightarrow\;\; \|S(\lambda) - S(\mu)\| \;<\; \varepsilon \ .$$

Kies $\varepsilon = \frac{1}{6}$ en definieer $r := \dfrac{1}{\rho(T)} - \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{1}{\rho(T)}$. Dan geldt

$$\bigwedge_{\substack{\omega \in \mathbb{C} \\ |\omega| = 1}} \quad \|S(r\omega) \;-\; S(\frac{\omega}{\rho(T)})\| \;\;<\;\; \frac{1}{6}$$

want

$$|r\omega \;-\; \frac{\omega}{\rho(T)}| \;\;=\;\; |\omega| \cdot |r - \frac{1}{\rho(T)}| \;\;=\;\; \frac{\delta}{2} \;\;<\;\; \delta \ .$$

Omdat $\dfrac{1}{r} > \rho(T) = \inf\limits_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ bestaat $m \in \mathbb{N}$ met $\|(rT)^m\| < \frac{1}{4}$, gebruik deze m om $\omega = \exp(\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{m})$ vast te leggen. In de veeltermring $\mathbb{C}[z]$ is dan

$$1 \;-\; z^m \;\;=\;\; \prod_{k=0}^{m-1} (1 - \omega^k z)$$

en breuksplitsing leidt tot

$$\frac{1}{1 - z^m} \;\;=\;\; \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k}{1 - \omega^k z}$$

met

$$\alpha_k \;=\; \lim_{z\to\omega^{-k}} \frac{1-\omega^k z}{1-z^m} \;\stackrel{!}{=}\; \lim_{z\to\omega^{-k}} \frac{-\omega^k}{-mz^{m-1}} \;=\; \frac{\omega^k}{m\omega^{-km+k}} \;=\; \frac{1}{m}$$

en dus

$$\frac{1}{1-z^m} \;=\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{1-\omega^k z}\;. \tag{5.2}$$

Elke veelterm $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ definieert het element $p(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in A$ en (5.2) blijft geldig (als we zorg dragen dat alleen maar inverteerbare elementen in de noemer staan). Vul rT in voor z:

$$(1-(rT)^m)^{-1} \;=\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\omega^k r)$$

terwijl we

$$(1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1} \;=\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})$$

krijgen als we $\frac{1}{\rho(T)}T$ voor z invullen. Nu kunnen we als volgt afschatten:

$$\begin{aligned}\left\|(1-(rT)^m)^{-1} \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\right\| \;&\leq\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\|S(\omega^k r) - S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})\| \\ &<\; \frac{1}{6}\;.\end{aligned}$$

Bovendien is

$$\|1 \;-\; (1-(rT)^m)^{-1}\| \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty}\|(rT)^m\|^j \;<\; \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \;=\; \frac{1}{3}$$

en dus

$$\|1 \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\| \;<\; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{2}$$

met als gevolg dat

$$\|(\frac{T}{\rho(T)})^m\| \;=\; \|1 \;-\; (1 \;-\; (1 \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}))^{-1}\| \;<\; \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \;=\; 1$$

wat $\|T^m\| < (\rho(T))^m$ zou betekenen, en dat is absurd. Daarmee kan (5.1) niet waar zijn. $\square$

Stelling 5.8. Zij A een complexe Banachalgebra met $1 \neq 0$ waarin elk element $T \neq 0$ inverteerbaar is. Dan is $A \cong \mathbb{C}$.

Bewijs. Voor $\lambda \in \sigma(T)$ is $\lambda - T$ niet inverteerbaar, dus $\lambda - T = 0$ ofwel $T = \lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

6

Compacte operatoren

Zie ook §5.3 in [Saxe], §§8.0 in [Young], §§6.1 en 6.2 in [Rynne and Youngson], §§11.1–11.4 in [Dieudonné] of §2.4 in [Teschl].

Stelling 6.1. (en definitie). Zij $T \in L(E,F)$ waar E een genormeerde ruimte is en F een Banachruimte. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) *Als $M \subseteq E$ begrensd dan is $\overline{T(M)}$ compact.*
(ii) *$T(U_1(0))$ is relatief compact.*
(iii) *Voor elke begrensde rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ bevat de rij der beelden $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij.*

We noemen T dan een compacte operator.

Stelling 6.2. Voor een Banachruimte E vormen de compacte operatoren $T : E \longrightarrow E$ een gesloten tweezijdig ideaal $K(E) \trianglelefteq L(E)$.

Stelling 6.3. (Riesz theorie). Zij E een complexe Banachruimte van oneindige dimensie en $T \in K(E)$ een compacte operator op E. Dan is $0 \in \sigma(T)$ en elke $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ is een eigenwaarde van T waarvoor de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimte

$$V_\lambda \quad := \quad \left\{ x \in E \;\middle|\; \text{er bestaat } k \in \mathbb{N} \text{ met } (\lambda - T)^k(x) = 0 \right\}$$

eindige dimensie heeft. Als $\sigma(T)$ oneindig veel elementen bevat, dan aftelbaar oneindig veel en 0 is het unieke accumulatiepunt van $\sigma(T)$.

Bewijs. De operator $0 - T = -T$ is niet inverteerbaar, want anders zou $\mathrm{id} = TT^{-1}$ compact zijn (en dus $\dim E < \infty$), d.w.z. $0 \in \sigma(T)$.

De ruimte $E_\lambda := \ker(\lambda - T)$ bestaat uit eigenvectoren (of $E_\lambda = 0$, als λ geen eigenwaarde). De restrictie

$$\begin{aligned} T|_{E_\lambda} : E_\lambda &\longrightarrow E_\lambda \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

is voor $\lambda \neq 0$ een inverteerbare compacte operator, dus $\dim E_\lambda < \infty$.

$$V_\lambda^k \ := \ \ker(\lambda - T)^k$$

generaliseert de eigenruimte, want $V_\lambda^1 = E_\lambda$ en $(\lambda - T)^{-1}(V_\lambda^k) = V_\lambda^{k+1}$. We hebben te maken met een stijgende rij, d.w.z. $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Zodra $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$ is ook $V_\lambda^\ell = V_\lambda^k$ voor alle $k \geq \ell$ (de rij wordt stationair).

Lemma 6.4. Als $V_\lambda^k \neq V_\lambda^{k+1}$ *dan is er een* $x_{k+1} \in V_\lambda^{k+1} \backslash V_\lambda^k$ *met* $\|x_{k+1}\| = \dfrac{1}{\lambda}$ *en* $\|Tx_{k+1} - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ *voor alle* $y \in V_\lambda^k$.

Bewijs. (van Lemma 6.4). Kies $x \in V_\lambda^{k+1}$ met $x \notin V_\lambda^k$, dan is

$$d \ := \ \inf_{y \in V_\lambda^k} \|x - y\| \ > \ 0$$

(want $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ gesloten), neem $z \in V_\lambda^k$ met $\|x - z\| \leq 2d$ en definieer

$$x_{k+1} \ := \ \frac{x - z}{\lambda \|x - z\|} \ \in \ V_\lambda^{k+1} \Big\backslash V_\lambda^k$$

waarmee $\|x_{k+1}\| = \dfrac{1}{\lambda}$. Bereken

$$\begin{aligned} \|Tx_{k+1} \ - \ Ty\| \ &= \ \|\lambda x_{k+1} \ - \ (\lambda - T)(x_{k+1}) \ - \ \lambda y \ + \ (\lambda - T)(y)\| \\ = \ &\left\| \frac{1}{\|x - z\|} [x \ - \ z \ - \ \|x - z\| \left((\lambda - T)(x_{k+1}) \ + \ \lambda y \ - \ (\lambda - T)(y) \right)] \right\| \\ &\geq \ \frac{d}{2d} \ = \ \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

□

Als $(V_\lambda^k)_k$ niet stationair wordt, dan is volgens Lemma 6.4 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ een begrensde rij waarvoor $(Tx_k)_k$ geen convergente deelrij bevat, en dat is absurd want T is compact. Zij ℓ minimaal met $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$, dan is $V_\lambda^\ell = V_\lambda$.

Lemma 6.5. Voor $k \in \mathbb{N}$ *is* $(\lambda - T)^k = \lambda^k - T_k$ *met* $T_k \in K(E)$.

Bewijs. (van Lemma 6.5). met inductie: $k = 1$ $\checkmark$ en $(\lambda - T)^{k-1}(\lambda - T) = (\lambda^{k-1} - T_{k-1})(\lambda - T) = \lambda^k - \lambda^{k-1}T - \lambda T_{k-1} + T_{k-1}T =: \lambda^k - T_k$. □

Dus V_λ^k is de eigenruimte van de compacte operator T^k behorende bij de eigenwaarde $\lambda^k \neq 0$. Dit heeft $\dim V_\lambda^k < \infty$ als gevolg en dus ook $\dim V_\lambda < \infty$.

Laat tenslotte zien dat $\lambda \neq 0$ geïsoleerd punt van $\sigma(T)$ is. D.w.z. geen accumulatiepunt, ofwel de rij(!) van eigenwaarden $\lambda_k \neq 0$ heeft limiet 0.

Lemma 6.6. Voor $\lambda \neq 0$ bestaat een gesloten deelruimte $F_\lambda < E$ met $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$ (d.w.z. F_λ is invariant onder T) en $E = V_\lambda \oplus F_\lambda$.

Het bewijs van Lemma 6.6 volgt zo meteen.

Merk op dat ook $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ want $(\lambda - T)^\ell(Ty) \overset{!}{=} T((\lambda - T)^\ell(y)) = 0$. Schrijf afkortend $T_V := T_{|V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ en $T_F := T_{|F_\lambda} : F_\lambda \longrightarrow F_\lambda$. Voor $x \in E$ bestaan (unieke) $y \in V_\lambda$, $z \in F_\lambda$ met $x = y + z \in V_\lambda \oplus F_\lambda$ en

$$Tx \;=\; Ty \;+\; Tz \;=\; T_V y \;+\; T_F z \;\in\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;,$$

men noteert dit ook als

$$T \;=\; T_V \oplus T_F : V_\lambda \oplus F_\lambda \longrightarrow V_\lambda \oplus F_\lambda \;.$$

Voor $\mu \neq \lambda$ is $\mu - T_V$ inverteerbaar. De restrictie T_F is compact en λ is geen eigenwaarde van T_F, dus $\lambda \notin \sigma(T_F)$, d.w.z. $\lambda - T_F$ is inverteerbaar, en daarmee ook $\mu - T_F$ inverteerbaar als $|\lambda - \mu|$ voldoende klein is. Als gevolg hiervan bestaat de inverse

$$(\mu - T)^{-1} \;=\; (\mu - T_V)^{-1} \;\oplus\; (\mu - T_F)^{-1}$$

voor alle $\lambda \neq \mu \in U_\varepsilon(\lambda)$ (ε klein) en dus $\sigma(T) \cap U_\varepsilon(\lambda) = \{\lambda\}$. □

Bewijs. (van Lemma 6.6). In meerdere stappen.

1). $\operatorname{im}(\lambda - T) < E$ is gesloten: zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ en $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda - T)(x_n)$, zoek $x \in E$ met $y = \lambda x - Tx$. Indien $d_n := \inf\limits_{z\in E_\lambda} \|x_n - z\|$ een begrensde rij is bestaan $x'_n \in E$ met $x_n - x'_n \in E_\lambda$ en

$$(\lambda - T)(x_n) \;=\; (\lambda - T)(x'_n)$$

waarvoor de $x'_n (= x_n - z_n)$ een begrensde rij vormen. Omdat T compact is bestaat een deelrij met $\lim\limits_{k\to\infty} Tx'_{n_k} = z \in E$, waarmee

$$\lambda x'_{n_k} \;=\; (\lambda - T)x'_{n_k} \;+\; Tx'_{n_k} \;\overset{k\to\infty}{\to}\; y \;+\; z$$

en dus

$$y \;=\; (\lambda - T)\left(\frac{y+z}{\lambda}\right) \;\in\; \operatorname{im}(\lambda - T) \;.$$

We moeten nog laten zien dat $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ begrensd is. Stel van niet, en stap over op een deelrij van $(x_n)_n$ opdat $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$. De $y_n = \dfrac{x_n}{d_n}$ voldoen aan $\inf\limits_{z\in E_\lambda} \|y_n - z\| = 1$, dus er bestaan $y'_n \in U_2(0)$ met

$$(\lambda - T)(y'_n) \;=\; (\lambda - T)(y_n) \;=\; \frac{1}{d_n}(\lambda - T)(x_n) \tag{6.1}$$

en $\inf\limits_{z\in E_\lambda} \|y'_n - z\| = 1$. In de limiet $n \to \infty$ leidt (6.1) tot

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda - T)(y'_n) \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} (\lambda - T)(x_n)\right) \;=\; 0 \cdot y \;=\; 0$$

en de compactheid van T impliceert $\lim\limits_{k\to\infty} Ty'_{n_k} = z \in E$ voor een welgekozen deelrij, waarmee ook $\lim\limits_{k\to\infty} y'_{n_k} = \dfrac{z}{\lambda} \in E$ en dat is absurd (want de afstand is en blijft gelijk aan 1). De rij $(d_n)_n$ is dus begrensd.

2). $F^k_\lambda := \mathrm{im}(\lambda - T)^k \overset{!}{=} \mathrm{im}(\lambda^k - T_k)$ is eveneens gesloten (want ook T_k is compact).

3). $V_\lambda \cap F^\ell_\lambda = \{0\}$. Voor $y \in V^\ell_\lambda \cap F^\ell_\lambda$ bestaat $x \in E$ met $y = (\lambda - T)^\ell(x)$, bovendien is $(\lambda - T)^\ell(y) = 0$ en dus $(\lambda - T)^{2\ell}(x) = 0$, ofwel $x \in V^{2\ell}_\lambda = V^\ell_\lambda$ en dan $y = (\lambda - T)^\ell(x) = 0$.

4). De dalende rij $F^k_\lambda \supseteq F^{k+1}_\lambda$ wordt stationair: er is een $m \in \mathbb{N}$ met $F^m_\lambda = F^{m+1}_\lambda$. Dit volgt met het volgende Lemma, dat men (oefening!) net zo als Lemma 6.4 kan bewijzen.

Lemma 6.7. Als $F^k_\lambda \neq F^{k+1}_\lambda$ dan is er een $x_{k+1} \in F^k_\lambda \backslash F^{k+1}_\lambda$ met $\|x_k\| = \dfrac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_k - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in F^{k+1}_\lambda$.

5). $F^m_\lambda = F^\ell_\lambda =: F_\lambda$, d.w.z. met dezelfde index ℓ als bij $V_\lambda = V^\ell_\lambda$. Anders is $m > \ell$ en er bestaat $y \in F^{m-1}_\lambda \subseteq F^\ell_\lambda$ met $y \notin F^m_\lambda$. Vanwege

$$(\lambda - T)(y) \;\in\; F^m_\lambda \;=\; (\lambda - T)(F^m_\lambda)$$

bestaat $z \in F^m_\lambda$ met $(\lambda - T)(y) = (\lambda - T)(z)$, d.w.z. $y - z \in E_\lambda \subseteq V^\ell_\lambda$ en dat is absurd (want $y - z \in F^\ell_\lambda$ en $y - z \neq 0$).

6). $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$. Voor $z \in F_\lambda$ is $Tz = \lambda z - (\lambda - T)(z) \in F_\lambda$.

7). $E = V_\lambda + F_\lambda$. Voor $x \in E$ is

$$(\lambda - T)^\ell(x) \;\in\; F_\lambda \;=\; (\lambda - T)^\ell(F_\lambda)\ ,$$

dus bestaat $z \in F_\lambda$ met

$$(\lambda - T)^\ell(x) \;=\; (\lambda - T)^\ell(z)\ ,$$

d.w.z. $y := x - z \in V_\lambda = V^\ell_\lambda$.

8). Vanwege 3) en 7) kunnen we elk element $x \in E$ op een unieke manier ontbinden in $x = y + z$ met $y \in V_\lambda$ en $z \in F_\lambda$. I.h.b. zijn de projecties $\pi_V(x) = y$ 'op V_λ langs F_λ' en $\pi_F(x) = z$ 'op F_λ langs V_λ' lineaire operatoren. Laat nu middels inductie zien dat π_V begrensd is (dan is $\pi_F = \mathrm{id} - \pi_V$ eveneens begrensd).

- Indien $\dim V_\lambda = 1$ kunnen we π_V als een lineaire vorm op E opvatten: kies een willekeurige vector $0 \neq v \in V_\lambda$ en definieer $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{C}$ d.m.v. $\pi_V(x) = \alpha(x)v$; omdat $\ker \alpha = F_\lambda$ een gesloten deelruimte van E is volgt dat α (en dus ook π_V) continu is.

– Voor $\dim V_\lambda > 1$ schrijf $V_\lambda = U \oplus W$ met $\dim U = 1$, dan is zoals net gezien de projectie π_1 'op U langs $W + F_\lambda$' continu, en binnen de Banachruimte $W + F_\lambda$ kunnen we de inductiehypothese gebruiken, dus is ook de projectie π_2 'op W langs F_λ binnen $W + F_\lambda$' continu. Maar dan is ook $\pi_V = \pi_1 + \pi_2 \circ (\mathrm{id} - \pi_1)$ continu.

□

Stelling 6.8. Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$. Dan bestaan $T_n \in L(H)$ van eindige rang met $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

7

Zelfgeadjungeerde operatoren

Zie ook §§5.4 en 5.5 in [Saxe], §§4.1 en 4.2 in [Zeidler], §§7.4 en 8.2 in [Young], §§6.2 en 6.3 in [Rynne and Youngson], §11.5 in [Dieudonné] of §2.5 in [Teschl].

Definitie 7.1. Zij H een Hilbertruimte. Een operator $T \in L(H)$ heet zelfgeadjungeerd als

$$\bigwedge_{x,y \in H} \langle Tx \mid y \rangle \;=\; \langle x \mid Ty \rangle \;.$$

Stelling 7.2. Zij H een Hilbertruimte, $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd en $F < H$ een deelruimte met $T(F) \subseteq F$. Dan is ook $F^\perp$ invariant onder T.

Stelling 7.3. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is $\operatorname{im} T \subseteq (\ker T)^\perp$ *en* $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T$.

Gevolg 7.4. Zij H een Hilbertruimte. Een zelfgeadjungeerde $T \in L(H)$ is dan en slechts dan inverteerbaar als

$$\bigvee_{\alpha > 0} \; \bigwedge_{x \in H} \|Tx\| \;\geq\; \alpha \|x\| \;.$$

Stelling 7.5. Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$\sigma(T) \;\subseteq\; \overline{\left\{ \langle Tx \mid x \rangle \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}} \;\subseteq\; \mathbb{R} \;.$$

Stelling 7.6. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$\rho(T) \;=\; \|T\| \;=\; \sup \left\{ |\, \langle Tx \mid x \rangle \,| \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\} \;.$$

Gevolg 7.7. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan bevat het spectrum $\sigma(T)$ het getal $\|T\|$ of $-\|T\|$.

Stelling 7.8. Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$T \;=\; \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda \, \pi_\lambda \;.$$

8

Integraalvergelijkingen

Zie ook §6.7 in [Saxe], §§4.3–4.5 in [Zeidler], §§9–11 in [Young], §§7.1–7.4 in [Rynne and Youngson], §§11.6 en 11.7 in [Dieudonné] of §§0.1 en 2.6 in [Teschl].

Stelling 8.1. (Fredholm-alternatief). Zij $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *continu met* $k(s,t) = k(t,s)$ *voor alle* $s,t \in [0,1]$*. Dan geldt een van de volgende twee alternativen. Of de inhomogene lineaire integraalvergelijking*

$$f(s) \; - \; \mu \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \;\; = \;\; h(s)$$

heeft voor iedere $h \in C[0,1]$ *een oplossing, of de bijbehorende homogene vergelijking*

$$f(s) \; - \; \mu \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \;\; = \;\; 0$$

heeft meer dan één oplossing.

Stelling 8.2. De eigenruimtes E_λ *van de door*

$$(T(f))(s) \;\; = \;\; \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

gedefinieerde integraaloperator staan loodrecht op elkaar, voor $\lambda \neq 0$ *heeft* E_λ *eindige dimensie en bestaat uit continue functies. Indien* $\ker T = 0$ *is er een volledig orthonormaalsysteem* $(e_i)_i$ *van continue eigenfuncties. Voor* $h \in \operatorname{im} T$ *is*

$$\lim_{n\to\infty} \|h \; - \; \sum_{i=1}^{n} \langle h \mid e_i \rangle e_i\|_\infty \;\; = \;\; 0 \;\; .$$

Bovendien is

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \;\; = \;\; \sum_\lambda \lambda^2 \, \dim E_\lambda$$

(waar we de conventie $0^2\infty = 0$ *gebruiken).*

Stelling 8.3. *Zij* $H : \mathcal{D}(\Delta) \longrightarrow L^2[0,1]$ *de Hamiltonoperator met potentiaal* $V(x) \geq V_0 > 0$*. Dan bestaat het spectrum* $\sigma(H)$ *uit (enkelvoudige) eigenwaarden* E_k *met*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{E_k} \quad = \quad \int_0^1 \int_0^1 G(x,y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en $0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_k < E_{k+1} \to \infty$*. De bijbehorende (genormeerde) eigenfuncties vormen een volledig orthonormaalsysteem bestaande uit functies* $\psi_k \in \mathcal{D}(\Delta)$*.*

9

Operatoren in Hilbertruimten

Zie ook §§5.2, 5.8 en 5.18 in [Zeidler], §§7.3 en 8.1 in [Young], §§5.1, 5.2, 5.4 en 6.2 in [Rynne and Youngson], §11.5 in [Dieudonné] of §7.2 in [Teschl].

Stelling 9.1. (en definitie). Zij H een Hilbertruimte, $\mathcal{D}(T) < H$ een dichte deelruimte en $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ een lineaire operator. Dan bestaat op

$$\mathcal{D}(T^*) \;:=\; \left\{ y \in H \;\middle|\; \bigvee_{z\in H} \; \bigwedge_{x\in\mathcal{D}(T)} \langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid z\rangle \right\}$$

precies één afbeelding $T^* : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow H$ met de eigenschap

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{D}(T)} \quad \bigwedge_{y\in\mathcal{D}(T^*)} \quad \langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid T^*y\rangle$$

en T^* is lineair. We noemen T^* de geadjungeerde *van T.*

Definitie 9.2. Indien $T = T^*$ *heet T zelfgeadjungeerd.*

Dit houdt in dat $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$. Men spreekt van een *symmetrische* (of *Hermite*sche) operator als $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle$ voor alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Omdat elke begrensde symmetrische operator automatisch zelfgeadjungeerd is bestaat tussen definities 9.2 en 7.1 geen tegenspraak.

Stelling 9.3. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$. Dan is ook $T^* \in L(H)$ en bovendien $\|T\| = \|T^*\|$.

Stelling 9.4. (en definitie). Zij H een Hilbertruimte en $S \in L(H)$. Dan zijn equivalent:

(i) $H = F \oplus F^\perp$ *met* $\|Sy\| = \|y\|$ *voor alle* $y \in F$ *en* $Sz = 0$ *voor alle* $z \in F^\perp$
(ii) S^*S *is een orthogonale projectie.*

In dit geval noemen we S een partiële isometrie.

Definitie 9.5. *Zij B een Banachalgebra en $^* : B \longrightarrow B$ een involutie, d.w.z. $(T^*)^* = T$ voor alle $T \in B$, met de eigenschappen*

(i) $(S+T)^* = S^* + T^*$ *voor alle* $S, T \in B$
(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ *voor alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *en alle* $T \in B$
(iii) $(ST)^* = T^* S^*$ *voor alle* $S, T \in B$
(iv) $\|T^* T\| = \|T\|^2$ *voor alle* $T \in B$.

Dan noemen we B een C^*-algebra.

Stelling 9.6. *Voor elementen $T \in B$ van een C^*-algebra is $\|T\| = \|T^*\|$. Indien $1 \in B$ is $1^* = 1$ en $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

I.h.b. is (dus) voor complexe C^*-algebra's $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$.

Definitie 9.7. *Zij B een C^*-algebra. We noemen $T \in B$ normaal als $T^*T = TT^*$ en zelfgeadjungeerd als $T = T^*$.*

Stelling 9.8. *Voor normale elementen $T \in B$ van een C^*-algebra is $\|T\| = \rho(T)$.*

Stelling 9.9. *Voor zelfgeadjungeerde elementen $T \in B$ van een (al dan niet complexe) C^*-algebra is $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Stelling 9.10. *(spectraalstelling voor normale compacte operatoren). Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ een compacte operator. Dan is T^* ook compact. Is bovendien H complex en T normaal, dan kunnen we*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda \, \pi_\lambda$$

schrijven, waar $\pi_\lambda \in L(H)$ de orthogonale projectie op de eigenruimte E_λ van T is.

Stelling 9.11. *(functionaalrekening). Zij B een C^*-algebra met 1 en $T \in B$ zelfgeadjungeerd. Dan bestaat er precies één continu en involutief algebrahomomorfisme $\Phi : C(\sigma(T)) \longrightarrow B$ die de 1 behoud met $\Phi(z \mapsto z) = T$. Deze Φ is een isometrie, we schrijven $f(T) := \Phi(f)$ voor alle $f \in C(\sigma(T))$ en hiervoor geldt bovendien $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

Stelling 9.12. *(polaire decompositie). Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$. Dan zijn er een partiële isometrie $U \in L(H)$ en een positieve zelfgeadjungeerde operator $A \in L(H)$ (d.w.z. $\langle Ax \mid x \rangle \geq 0$ voor alle $x \in H$) met $T = UA$. Voor inverteerbaar T is U unitair en zijn U en A uniek.*

Stelling 9.13. *Zij H een separabele Hilbertruimte en $(e_n)_n$ een volledig orthonormaalsysteem van H. Dan noemen we $T \in L(H)$ Hilbert–Schmidt operator als de (van $(e_n)_n$ onafhankelijke) uitdrukking*

$$|||T||| \;:=\; \left(\sum_n \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eindig is. De ruimte $L_2(H)$ *van Hilbert–Schmidt operatoren wordt hierdoor van een norm voorzien en maakt* $L_2(H)$ *zelfs tot een Hilbertruimte. De deelverzameling* $L_2(H) \triangleleft L(H)$ *vormt een (tweezijdig) ideaal en bovendien geldt* $L_2(H) \subseteq K(H)$*, dus elke Hilbert–Schmidt operator is compact. Indien* T *normaal is met eigenwaarden* λ_n *is tenslotte*

$$|||T|||^2 \;=\; \sum_n |\lambda_n|^2 \;.$$

References

[Dieudonné] *Jean Dieudonné : Foundations of Modern Analysis* ; Academic Press (1960)

[Rynne and Youngson] *Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson : Linear Functional Analysis* ; Springer (2000)

[Saxe] *Karen Saxe : Beginning Functional Analysis* ; Springer (2002)

[Teschl] *Gerald Teschl : Functional Analysis* ;
`http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/index.html`

[Young] *Nicholas Young : An Introduction to Hilbert space* ; Cambridge Univ. Press (1988)

[Zeidler] *Eberhard Zeidler : Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics* ; Applied Mathematical Sciences **108**, Springer (1995)