# Functionaalanalyse 2007/8

**Inleverdatum voor opgaven 9 en 10 is 5 october (11:00)**

7). Gegeven zijn twee Hilbertruimten $E$ en $F$, in het vervolg maken we in de notatie geen verschil tussen de door de inproducten geïnduceerden normen $\|y\| = \|y\|_E$ op $E$ en $\|z\| = \|z\|_F$ op $F$.

(*i*) Ga na dat de volgende normen op het cartesische product $E \times F$ equivalent zijn:

$$\|(y,z)\|_1 := \|y\|+\|z\| \quad , \quad \|(y,z)\|_2 := (\|y\|^2+\|z\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|(y,z)\|_\infty := \max\{\|y\|,\|z\|\} \ .$$

Met welke van deze normen is ook $E \times F$ (isometrisch isomorf met) een Hilbertruimte?

(*ii*) Kies één van bovenstaande normen en laat zien dat de vier lineaire operatoren

$$\begin{aligned}
\iota_E : E \longrightarrow E \times F \quad &, \quad \iota_E(y) = (y,0) \\
\iota_F : F \longrightarrow E \times F \quad &, \quad \iota_F(z) = (0,z) \\
\pi_E : E \times F \longrightarrow E \quad &, \quad \pi_E(y,z) = y \\
\pi_F : E \times F \longrightarrow F \quad &, \quad \pi_F(y,z) = z
\end{aligned}$$

continu zijn. In hoeverre is dit afhankelijk van de norm die je hebt gekozen?

(*iii*) Zij $H$ een Hilbertruimte en $E, F < H$ gesloten deelruimten met $H = E+F$ en $E \cap F = \{0\}$, dus elk element $x \in H$ kan op precies één manier worden geschreven als som $x = y+z$ van elementen $y \in E$ en $z \in F$. Onder welke voorwaarden is $H$ isometrisch isomorf met $E \times F$ ?

8). Zij $H$ een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Ga na dat $F$ en de quotientruimte $H/_F$ dan ook Hilbertruimten zijn.

9). Laat zien dat de natuurlijke inclusie $T : C[0,1] \longrightarrow (C[0,1])^{**}$ in de biduale ruimte die gegeven is door $T_f(\alpha) = \alpha(f)$ voor alle $f \in C[0,1]$ en alle $\alpha \in (C[0,1])^*$ een isometrie is. *Hint:* werk eerst met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ga na dat elke integreerbare begrensde functie $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ d.m.v.

$$\alpha_g(f) \;=\; \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

een element $\alpha_g \in (C[0,1])^*$ definieert en bepaal voor gegeven $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ een geschikte functie $g$ met waarden $\pm 1$ waarvoor $\|f\|_1 = \alpha_g(f)$. Concludeer $\|f\|_1 \leq \|T_f\| \leq \|f\|_1$ en dus gelijkheid. Voor $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kun je met een beschrijving hoe je je constructie moet aanpassen voldoen.

10). Beschouw op $C[0,1]$ het inproduct

$$\langle f \mid g \rangle \;=\; \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

en de d.m.v.

$$(Tf)(t) \;=\; t \cdot f(t)$$

gedefinieerde operator.

($i$) Laat zien dat $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ continu is en concludeer dat men $T$ ook als operator $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ can beschouwen.

($ii$) Is $T$ injectief?

($iii$) Is $T$ surjectief?

($iv$) Hoe zou het antwoord op ($ii$) en ($iii$) zijn als we het interval $[0,1]$ door het interval $[1,2]$ vervangen?