Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 15 en 16 is 19 october (11:00)

13). Laat zien dat elke eindigdimensionale deelruimte van een separabele Hilbertruimte gesloten is.

14). Laat zien dat voor een metrische ruimte V de volgende uitspraken equivalent zijn.

(i) V is compact, d.w.z. voor elke overdekking $V = \bigcup_{i \in I} U_i$ van V met open verzamelingen $U_i \subseteq V$ zijn er eindig veel $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ van deze open verzamelingen die V al overdekken.

(ii) V is compleet en precompact, d.w.z. voor elk $\varepsilon > 0$ kan men eindig veel open verzamelingen $U_1, \ldots, U_n$ van de vorm $U_i = \{x \in V \mid d(x, x_i) < \varepsilon\}$ met geschikte x_i vinden die V overdecken.

Concludeer dat compacte metrische ruimten separabel zijn.

15). Zij H een Hilbertruimte en $D \subseteq H$ een deelverzameling. Ga na dat $D^{\perp\perp} = \overline{\langle D \rangle}$.

16). Ga na of de volgende deelverzamelingen van ℓ^2 compact zijn.

$$\left\{ a \in \ell^2 \;\middle|\; \|a\|_2 = 1 \right\}$$

$$\left\{ a \in \ell^2 \;\middle|\; |a_k| \leq \frac{1}{k} \text{ voor alle } k \in \mathbb{N} \right\}$$