Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum: 30 november (11:00)

27). Definieer op de ruimte $C^1[0,1]$ van continu differentieerbare functies de norm

$$\|f\|_{C_1} \;:=\; \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \;+\; \sup_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|$$

en de inclusieoperator

$$\begin{array}{rccc} \iota : & C^1[0,1] & \longrightarrow & C[0,1] \\ & f & \mapsto & f \end{array}$$

waar op de beeldruimte $C[0,1]$ met de supremumnorm

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

gewerkt wordt.

(a) Laat zien dat ι compact is. *Hint:* gebruik de stelling van Arzelà–Ascoli en de middenwaardestelling.

(b) Wat kun je over het spectrum $\sigma(\iota)$ zeggen?

(c) Kun je dit generalizeren naar $C^1(\overline{\Omega})$, waar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ een geschikte open deelverzameling is? Wat zijn dan voorbeelden voor 'geschikte' Ω ?

28). Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ een compacte lineaire operator. Ga na dat

$$\operatorname{im} T \text{ gesloten} \quad\Leftrightarrow\quad \dim(\operatorname{im} T) \;<\; \infty \;.$$