Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 31 en 32 is 7 december (11:00)

29). Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Definieer de orthogonale projectie $\pi : H \longrightarrow H$ d.m.v. de splitsing $H = F \oplus F^\perp$, d.w.z. stel $\pi(x) = y$ voor $x = y + z$ met $y \in F$ en $z \in F^\perp$.

(*i*) Ga na dat π zelfgeadjungeerd is.

(*ii*) Bereken het spectrum $\sigma(\pi)$.

(*iii*) Onder welke voorwaarden is π een compacte operator?

30). Geef een bewijs van *Lemma 6.7* voor de (gesloten) deelruimten $F_\lambda^k := \mathrm{im}(\lambda - T)^k$, waarbij $T \in K(E)$: Als $F_\lambda^k \neq F_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in F_\lambda^k \backslash F_\lambda^{k+1}$ met $\|x_k\| = \dfrac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_k - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in F_\lambda^{k+1}$.

31). Zij $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ een rijtje getallen met $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ en H een oneindigdimensionale Hilbertruimte. Construeer een zelfgeadjungeerde compacte operator $T : H \longrightarrow H$ met spectrum $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

32). Zij H een (oneindigdimensionale) Hilbertruimte. Schrijf

$$\mathcal{F}(H) \;:=\; \left\{\; T \in L(H) \;\;|\;\; \mathrm{im}\, T \text{ is gesloten } \;\&\; \dim(\mathrm{im}\, T)^\perp < \infty \;\&\; \dim\ker T < \infty \;\right\}$$

voor de verzameling van zg. Fredholmoperatoren.

(*i*) Laat zien dat voor een zelfgeadjungeerde compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(*ii*) Laat zien dat voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(*iii*) Zij E nu een Banachruimte en $T \in L(E)$. Doel van deze deelopgave is om een uitbreiding van de definitie van Fredholmoperatoren naar deze setting te vinden. Geef een vervanging voor $(\mathrm{im}\, T)^\perp$ die in het geval van een Hilbertruimte dezelfde dimensie heeft. Gebruik deze om de verzameling $\mathcal{F}(E) \subseteq L(E)$ van Fredholmoperatoren op E te definiëren. Ga na dat ook dan voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.