Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum: 14 december 2006 (11:00)

33). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{3k-2} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-1} + e_{3k}) \\ Te_{3k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k}) \\ Te_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k-1}) \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

(i) Geef de matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(ii) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

(iii) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

34). Zij H een separabele Hilbertruimte en $T \in L(H)$ een zelfgeadjungeerde operator. Laat zien dat het spectrum $\sigma(T)$ hooguit aftelbaar veel eigenwaarden bevat. *Opmerking:* de vermenigvuldigingsoperator uit opgave 10 geeft een voorbeeld van een zelfgeadjungeerde operator (op de separabele Hilbertruimte $L^2[0,1]$) waarvoor het spectrum overaftelbaar is.