Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 15 en 16 is 10 october (11:00)

13). Laat zien dat elke eindigdimensionale deelruimte van een separabele Hilbertruimte gesloten is.

14). Zij $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een volledig orthonormaalsysteem in een Hilbertruimte H. Stel $x_n := e_{2n}$ en $y_n := x_n + \frac{1}{n+1}e_{2n+1}$ en definieer F als de afsluiting van het opspansel van de x_n , $n \in \mathbb{N}$ en G als de afsluiting van het opspansel van de y_n , $n \in \mathbb{N}$.

(i) Laat zien dat elk element in

$$F \; + \; G \;\; := \;\; \left\{ z \in H \;\middle|\; z = x + y \text{ met } x \in F \text{ en } y \in G \right\} \;\; ,$$

dus elk element dat als som van elementen uit F en G kan worden geschreven, op precies één manier als som van elementen uit F en G kan worden geschreven. *Hint:* bestudeer $F \cap G$.

(ii) Gebruik (i) om een projectie $\pi : F + G \longrightarrow F$ te definiëren en ga na dat deze lineaire operator niet continu is. *Hint:* laat zien dat de d.m.v. $z_n := y_n - x_n$ gedefinieerde rij convergent is, terwijl $(\pi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ niet convergeert.

(iii) Ga na dat $F+G$ een dichte deelruimte van H is en dat $F+G \neq H$. *Hint:* bestudeer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$.

15). Zij H een reële Hilbertruimte en $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineair en begrensd, d.w.z. er bestaat $C > 0$ met

$$\bigwedge_{x,y\in H} \quad |B(x,y)| \;\leq\; C\,\|x\|\,\|y\| \;\; .$$

Toon aan dat er precies één operator $T \in L(H)$ bestaat met de eigenschap

$$\bigwedge_{x,y\in H} \quad B(x,y) \;=\; \langle Tx \mid y \rangle \;\; .$$

Hint: als je $x \in H$ vasthoudt is $B(x,..) \in H^*$.

16). Beschouw op $C[0,1]$ het inproduct

$$\langle f \mid g \rangle \quad = \quad \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

en de d.m.v.

$$(Tf)(t) \quad = \quad t \cdot f(t)$$

gedefinieerde operator.

(i) Laat zien dat $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ continu is en concludeer dat men T ook als operator $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ can beschouwen.

(ii) Is T injectief?

(iii) Is T surjectief?

(iv) Hoe zou het antwoord op (ii) en (iii) zijn als we het interval $[0,1]$ door het interval $[1,2]$ vervangen?