Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 35 en 36 is 21 november (11:00)

33). Definieer op de ruimte $C^1[0,1]$ van continu differentieerbare functies de norm

$$\|f\|_{C_1} \ := \ \sup_{0\le x\le 1} |f(x)| \ + \ \sup_{0\le x\le 1} |f'(x)|$$

en de inclusieoperator

$$\begin{aligned} \iota : \ C^1[0,1] & \longrightarrow C[0,1] \\ f & \longmapsto f \end{aligned}$$

waar op de beeldruimte $C[0,1]$ met de supremumnorm

$$\|f\|_\infty \ := \ \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$$

gewerkt wordt.

(a) Laat zien dat ι compact is. *Hint:* gebruik de stelling van Arzelà–Ascoli en de middenwaardestelling.

(b) Kun je dit generalizeren naar $C^1(\overline{\Omega})$, waar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ een geschikte open deelverzameling is? Wat zijn dan voorbeelden voor 'geschikte' Ω ?

34). Geef een bewijs van *Lemma 7.9* voor de (gesloten) deelruimten $F_\lambda^k := \operatorname{im}(\lambda - T)^k$, waarbij $T \in K(E)$: Als $F_\lambda^k \neq F_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in F_\lambda^k \backslash F_\lambda^{k+1}$ met $\|x_k\| = \dfrac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_k - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in F_\lambda^{k+1}$.

35). Zij $V < \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van veeltermen p van graad $\deg p \leq 4$ en $T : V \longrightarrow V$ de lineaire afbeelding

$$(Tp)(x) \ = \ p(x+1) \ - \ p'(x) \ .$$

Bereken een basis van V waarin T in Jordan-normaalvorm wordt gerepresenteerd.

36). Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ een compacte lineaire operator. Ga na dat

$$\operatorname{im} T \text{ gesloten} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{im} T) \ < \ \infty \ .$$