Functionaalanalyse 2008/9

Extra opgaven, ook voor thuis

49). Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$.

a) Laat zien dat T^*T zelfgeadjungeerd is en dat $\|T^*T\| = \|T\|^2$ geldt.

b) Zij T bovendien compact. Ga na dat de geadjungeerde operator T^* dan evenveens compact is.

50). Beschouw de Volterra-operator uit opgave 44, voortgezet tot een operator $V : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$.

(i) Laat zien dat $\operatorname{rang}(V + V^*) = \dim(\operatorname{im}(V + V^*)) = 1$ is.

(ii) Ga na dat voor elke zelfgeadjungeerde operator $T \in L(H)$ op een Hilbertruimte H met $\operatorname{rang} T = 1$ een $y \in H$ zodanig bestaat dat T kan worden geschreven als $Tx = \langle x \mid y \rangle \, y$ voor alle $x \in H$.

(iii) Schrijf de operator $T = V + V^*$ in de vorm $Tf = \langle f \mid g \rangle \, g$ met een passende $g \in L^2[0,1]$.

51). Lees in hoofdstukken 9 en 11 van [Young] hoe men het probleem van de hangende ketting m.b.v. Sturm–Liouville theorie kan oplossen.

52). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v. $Te_k = e_{2k}$ gedefinieerde continue lineaire operator.

(i) Laat zien dat T een isometrie is en bereken de geadjungeerde operator T^*.

(ii) Bepaal de eigenwaarden van T^*. *Hint:* je kunt hiervoor de voor de linker shift gebruikte constructie aanpassen.

(iii) Ga na dat elke eigenruimte van T^* oneindige dimensie heeft.

(iv) Bereken het spectrum $\sigma(T)$.

53). Definieer de integraaloperator

$$Kf(s) \;=\; \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

op $C([0,1], \mathbb{C})$ d.m.v. $k(s,t) := \sin(2\pi s) \, \mathrm{e}^{-t}$ en zet deze voort tot een begrensde operator K op de complexe Hilbertruimte $L^2([0,1], \mathbb{C})$.

(i) Geef een formule voor de geadjungeerde K^* van K.

(ii) Bereken K^*K en de spectrale representatie $K^*K = \sum_{\lambda \in \sigma(K^*K)} \lambda \, \pi_\lambda$.

(iii) Controleer of K normaal is.

(iv) Bepaal het spectrum van K en de eigenruimten.