Functionaalanalyse 2008/9

Opgaven uit het (her)tentamen vorig jaar en meer

54). Definieer op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ de operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v.

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \;=\; (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

met $y_{2k-1} := x_{2k-1} - x_{2k}$ en $y_{2k} := x_{2k-1} + x_{2k}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Ga na dat T lineair en begrensd is.

(ii) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

(iii) Laat zien dat T normaal is.

(iv) Bepaal de polaire decompositie van T.

55). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $n_k := \frac{1}{2}k(k-1) = \sum_{l=1}^{k-1} l$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Definieer d.m.v.

$$T(e_j) \;:=\; \frac{1}{k^2}\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} e_i \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{N} \text{ en alle } j = n_k+1, \ldots, n_{k+1}$$

een continue lineaire operator $T : H \longrightarrow H$.

(i) Geef de matrices $A_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en $A_3 \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. $\{e_2, e_3\}$ en $\{e_4, e_5, e_6\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimten representeren en bereken hun eigenwaarden. Is A_3 diagonaliseerbaar?

(ii) Beschrijf voor alle $k \in \mathbb{N}$ de matrix A_k die T t.o.v. $\{e_j \mid j = n_k+1, \ldots, n_{k+1}\}$ op de hierdoor opgespande deelruimte representeert, de eigenwaarden van A_k en de bijbehorende eigenruimten.

(iii) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(iv) Bepaal de ingrediënten van de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

56). Gebruik op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ het volledige orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} - \mathrm{i}e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k}(\mathrm{i}e_{2k-1} + e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

(*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

(*ii*) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

(*iii*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*iv*) Bereken de spectrale representatie $T = \sum\limits_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

57). Lees in het boek van je keuze de behandelde stof na. [Saxe]: hoofdstukken 1, 2, 4 en 5, bovendien de secties 6.1–6.3, 6.5 en 6.7 uit hoofdstuk 6. [Zeidler]: hoofstuk 1 (veel weggelaten), hoofdstuk 2 (iets weggelaten), hoofdstuk 3 (t/m sectie 3.6) en hoofdstuk 4, bovendien de secties 5.2, 5.8 en 5.18 uit hoofdstuk 5. [Young]: hoofdstukken 1–8 en 10. [Rynne & Youngson]: hoofdstukken 1–4 en 6–8, bovendien de secties 5.1 en 5.4–5.6 uit hoofdstuk 5. [Dieudonné]: hoofdstukken 5–7 en 11, bovendien de secties 3.14–3.17 uit hoofdstuk 3. [Teschl]: hoofdstukken 0–2 en 7 bovendien de secties 5.1 en 5.2 uit hoofdstuk 5.

58). Kan een vermenigvuldigingsoperator op $L^2[0,1]$ van Hilbert–Schmidt type zijn?

59). Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ normaal met de eigenschap, dat het spectrum $\sigma(T) = \{\lambda\}$ alleen uit het punt $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat. Laat zien dat dan $T = \lambda\,\mathrm{id}$.

60). Bewijs stelling 10.16 en leg uit wat deze voor unitaire en orthogonale matrices betekent.