B

Matrixgroepen

De lineaire algebra is niet alleen een theorie waar de functionaalanalyse op voort bouwt, omgekeerd hebben sommige resultaten uit de hoofdtext ook consequenties voor de lineaire algebra. Doel van deze text is om hiervan expliciete formuleringen te geven.

De groep $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ van inverteerbare $n \times n$–matrices beschrijft de algemene overgang tussen bases in een vectorruimte van dimensie n, en de (onafhankelijke) keuzemogelijkheid van bases in de oorsprongsruimte en de beeldruimte van een lineaire afbeelding komt neer op de groepsactie

$$A \quad \mapsto \quad SAT^{-1} \tag{B.1}$$

van $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ op $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Zoals men door aanvullen van bases van $\ker A$ en dan van $\operatorname{im} A$ kan zien, is deze groepsactie transitief op de matrices van rang k.

Dit blijft (bijna) geldig als we ons beperken tot bases waarvoor het parallellopipedum een (georienteerd) volume $= 1$ heeft. De speciale lineaire groep

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \quad = \quad \left\{ S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \det S = 1 \right\}$$

is een normale deler van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en de restrictie van de door (B.1) gedefinieerde groepsactie tot $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ kan in principe tot een onderverdeling van de banen leiden. Voor rang $k < n$ of $k < m$ is het echter altijd mogelijk om een basisvector in $\ker T$ danwel buiten $\operatorname{im} T$ met een scalair te vermenigvuldigen zonder de representerende matrix te veranderen. De matrices A van rang $k = n = m$ zijn inverteerbaar en worden in overaftelbaar veel banen onderverdeeld omdat de determinant een invariant van de groepsactie wordt. De diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A \end{pmatrix}$$

is dan een normaalvorm voor A.

In eindige dimensie zijn isometrieën automatisch surjectief en elk compleet orthonormaalsysteem is een basis. De groepen

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \left\{ T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; T^{-1} = T^{\mathrm{T}} \right\} \\ \mathrm{U}(n) &= \left\{ T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; T^{-1} = T^{*} \right\} \end{aligned}$$

van orthogonale en unitaire matrices hebben reële dimensies $\frac{1}{2}n(n-1)$ en n^2. Vanwege opgave 10.23 zijn de singuliere waarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ van een matrix A van rang k invarianten van de restrictie van (B.1) tot $\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n)$ danwel $\mathrm{U}(m) \times \mathrm{U}(n)$. De normaalvormen zijn de reële matrices $(\alpha_{ij})_{i,j}$ met $\alpha_{ii} = \lambda_i$ als $i = 1, \ldots, k$ en anders $\alpha_{ij} = 0$.

Verdere restrictie tot $\mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n)$ danwel $\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$ met $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ kan in principe tot een nog fijnere onderverdeling van de banen leiden. Deze vindt alleen plaats voor inverteerbare matrices, vervang hier $\lambda_n > 0$ door

$$\alpha_{nn} = \frac{\det A}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}} = \sigma \lambda_n$$

in de normaalvorm, met $\sigma = \dfrac{\det A}{|\det A|} \in \mathbb{K}$.

Op de ruimte $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ van kwadratische matrices is men vaak meer geïnteresseerd in de groepsactie

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times M_{n\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n\times n}(\mathbb{K}) \\ (T, A) & \mapsto & TAT^{-1} \end{array} \tag{B.2}$$

omdat dan vanwege

$$T(AB)T^{-1} = (TAT^{-1})(TBT^{-1})$$

de algebra-structuur op $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ wordt gerespecteerd. Naast de eigenwaarden zijn ook de lengten van de Jordan blokken invarianten van (B.2). Omgekeerd hebben we met behulp van de Riesz theorie 7.5 gezien dat elke $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$–baan een matrix in Jordan normaalvorm bevat. De restrictie van de groepsactie tot $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ leidt tot dezelfde $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$–banen, maar heeft in enkele uitzonderingsgevallen een onderverdeling in twee $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$–banen tot gevolg.

De restrictie van (B.2) tot de groepen $\mathrm{O}(n)$ danwel $\mathrm{U}(n)$ zet de commutator $[A, A^*] = AA^* - A^*A$ om in

$$T[A, A^*]T^{-1} = [TAT^{-1}, TA^*T^{-1}]$$

(waarbij $A^* = A^{\mathrm{T}}$ in het reële geval) en zorgt zo voor een verdere onderverdeling van de banen. Voor een normale matrix verdwijnt $[A, A^*] = 0$ en is de

$U(n)$–normaalvorm vanwege de spectraalstelling 10.16 een diagonaalmatrix. De $O(n)$–normaalvorm van een normale matrix is een blokdiagonaalmatrix met de reële eigenwaarden in 1×1–blokken en 2×2–blokken van de vorm

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \ , \quad b > 0$$

waarin de $a \pm ib$ de complexe eigenwaarden zijn. Verdere restrictie tot $\mathrm{SO}(n)$ zorgt ervoor dat in het laatste 2×2–blok $b < 0$ niet kan worden uitgesloten. Past men dit in het bijzonder op de normale matrix $S \in \mathrm{SO}(n)$ toe, dan is er dus een positief georienterde orthonormaalbasis ten opzichte waarvan S door een blokdiagonaalmatrix wordt gerepresenteerd waarin een even aantal eigenwaarden -1 en een aantal $m \equiv n \pmod 2$ eigenwaarden $+1$ op de diagonaal staan en rotatieblokken

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

met hoeken $0 < \alpha < \pi$; indien er geen reële eigenwaarden zijn kan $\alpha > \pi$ voor de laatste hoek niet worden uitgesloten.

Voor $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ beschouwt men naast de additieve Jordan normaalvorm ook de multiplicatieve Jordan normaalvorm. Vervang hiervoor de 1en in een Jordan blok door de bijbehorende eigenwaarde, dat wil zeggen werk met $\{v^1, \ldots, v^\ell\}$ waarin $v^\ell \in \ker(\lambda - T)^\ell \setminus \ker(\lambda - T)^{\ell-1}$ en $v^k = \frac{-1}{\lambda}(\lambda - T)v^{k+1}$ voor $k = 1, \ldots, \ell - 1$. Dan is T het product van een diagonaalmatrix D met op de diagonaal de eigenwaarden van T en een speciale Jordanmatrix J met 1en ook op de diagonaal die precies dezelfde volgorde van Jordanblokken als T heeft. In het bijzonder commuteren deze twee matrices, de volgorde in het product $T = DJ = JD$ is niet belangrijk.

Voor de polaire decompositie $T = SA$ van $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ is de volgorde van $S \in O(n)$ danwel $S \in U(n)$ en de positief definiete symmetrische danwel Hermitese matrix A wél belangrijk, behalve als T normaal is. Indien $T \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ is $1 = \det S \cdot \det A$ met $|\det S| = 1$ en $\det A > 0$, dus $\det A = 1 = \det S$ en daarmee $S \in \mathrm{SO}(n)$ danwel $S \in \mathrm{SU}(n)$. De positief definiete A met $\det A = 1$ kan worden geschreven als $A = \exp B$ met een symmetrische danwel Hermitese matrix B waarvoor de spoor verdwijnt, $\operatorname{trace} B = 0$. Omdat de polaire decompositie van inverteerbare matrices uniek is levert deze de homeomorfismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \approx & O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \approx & U(n) \times \mathbb{R}^{n^2} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & \approx & \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & \approx & \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1} \end{array}$$

op. Hieruit kunnen we topologische eigenschappen afleiden, zie ook opgave B.13.

Stelling B.1. De groep $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *is padsgewijs samenhangend en* $\mathrm{SO}(n) < \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *is een maximale compacte deelgroep.*

Bewijs. Omdat $\mathbb{R}^m$ padsgewijs samenhangend is moeten we deze topologische eigenschap alleen voor $\mathrm{SO}(n)$ bestuderen. Gegeven $S \in \mathrm{SO}(n)$ bestaat $T \in \mathrm{SO}(n)$ zodanig, dat TST^{-1} een blokdiagonaalmatrix D is van rotatieblokken (B.3) met $0 \leq \alpha < 2\pi$ en een extra eigenwaarde 1 op de diagonaal als n oneven is. De hoeken $\alpha(t) = t\alpha$ definiëren een pad $D(t)$ met $D(0) = \mathrm{id}$ en $D(1) = D$ en zodanig een pad $S(t) = T^{\mathrm{T}} D(t)\, T$ welke S binnen $\mathrm{SO}(n)$ met id verbindt.

Vanwege $\|S\| = 1$ voor alle $S \in \mathrm{SO}(n)$ is deze deelgroep begrensd. De afbeeldingen $S \mapsto \det S$ en $S \mapsto SS^{\mathrm{T}}$ die $\mathrm{SO}(n)$ door middel van $\det S = 1$ en $SS^{\mathrm{T}} = \mathrm{id}$ definiëren zijn continu. Dus $\mathrm{SO}(n) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ is ook gesloten en daarmee compact.

Zij nu $G < \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ een deelgroep die $SO(n)$ echt bevat, dat wil zeggen er bestaat $T \in G$ met polaire decompositie $T = SA$ waarin A een (positieve) eigenwaarde $\lambda \neq 1$ heeft, zij verder $R \in \mathrm{SO}(n)$ een rotatie die A met resultaat D diagonaliseert. Dan is naast $A = S^{-1}T \in G$ ook voor alle $n \in \mathbb{N}$ de diagonaalmatrix

$$D^n \;=\; R^{-1}A^nR \;\in\; G\ .$$

Indien $\lambda < 1$ is $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ en indien $\lambda > 1$ is $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = \infty$. In beide gevallen kan er geen deelrij van $(D^n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ bestaan die binnen G convergeert, ofwel G is niet compact. □

De groep $\mathrm{O}(n)$ is niet samenhangend, maar heeft de twee samenhangscomponenten $\det^{-1}(1) = \mathrm{SO}(n)$ en $\det^{-1}(-1)$. Als we een vaste spiegeling T kiezen, bijvoorbeeld de spiegeling

$$Tx \;=\; x \;-\; 2x_1e_1$$

aan het hypervlak $e_1^{\perp} = < e_2, \ldots, e_n >$, dan is elke spiegeling uit $\mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{SO}(n)$ het product van T met een rotatie uit $\mathrm{SO}(n)$. Dit laat zien dat $\mathrm{O}(n)$ homeomorf is met de disjuncte vereniging van twee kopieën van $\mathrm{SO}(n)$.

Definitie B.2. Een kwadratische vorm q *op* $\mathbb{K}^n$ *is een homogene veelterm* $q(x) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *van graad 2. Een Hermitese vorm* r *op* $\mathbb{C}^n$ *is een veelterm*

$$r(z) \;\in\; \mathbb{C}[z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n]$$

waarvoor een sesqui-lineaire vorm $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *met* $B(y,x) \equiv \overline{B(x,y)}$ *zodanig bestaat, dat*

$$\bigwedge_{z\in\mathbb{C}^n} \quad r(z) \;=\; B(z,z)\ .$$

Ook al is en Hermitese vorm geen (complexe) kwadratische vorm, spreekt men in de literatuur toch van een Hermitese kwadratische vorm. Merk op dat

$$r(z) \;=\; B(z,z) \;=\; \overline{B(z,z)} \;=\; \overline{r(z)}$$

reëel is. Volgens opgave 8.16 bestaat er een Hermitese matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ met

$$\bigwedge_{z\in\mathbb{C}^n} \quad r(z) \;=\; \langle Az \mid z\rangle \;=\; \langle z \mid Az\rangle$$

en net zoals in opgave 1.18 kunnen we B uit r met behulp van de polarisatie-identiteit

$$B(x,y) \;=\; \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \mathrm{i}^k r(x+\mathrm{i}^k y)$$

terugwinnen. Voor een reële kwadratische vorm bestaat een symmetrische matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ met

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} \quad q(x) \;=\; \langle Ax \mid x\rangle \;=\; \langle x \mid Ax\rangle$$

die we net zoals in opgave 1.16 met behulp van de polarisatie-identiteit

$$\langle Ax \mid y\rangle \;=\; \frac{q(x+y) \;-\; q(x-y)}{4}$$

kunnen bepalen. De matrix A is dan en slechts dan positief definiet als $\sqrt{q}$ respectievelijk $\sqrt{r}$ een norm definieert. We noemen q respectievelijk r niet-gedegenereerd als A inverteerbaar is.

Voor $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ wordt de getransformeerde vorm door T^*AT gerepresenteerd ($T^* = T^{\mathrm{T}}$ als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) en door met $T^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ te transformeren ontstaat de groepsactie

$$A \;\mapsto\; TAT^* \tag{B.4}$$

op de ruimte van symmetrische danwel Hermitese matrices. Voor $T \in \mathrm{SO}(n)$ danwel $T \in \mathrm{SU}(n)$ stemt (B.4) overeen met (B.2) en kunnen we stelling 10.16 toepassen.

Gevolg B.3. (Euler, hoofdassentransformatie). Zij q een reële kwadratische vorm of r een Hermitese vorm. Dan bestaan reële getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ en nieuwe coördinaten waarin

$$q(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$$

respectivelijk

$$r(z) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \bar{z}_j \;\; .$$

De diagonaalcoëfficienten zijn op volgorde na uniek. □

Het is dus mogelijk om de gemengde termen weg te transformeren. Als we ook met $\sqrt{|\lambda_j|}$ mogen schalen houden we eindig veel gevallen over.

Stelling (en definitie) B.4. De banen van de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*–actie* (B.4) *worden door het aantal* k *van positieve eigenwaarden en het aantal* ℓ *van negatieve eigenwaarden geclassificeerd. Hieruit resulteren de vormen*

$$q(x) \;=\; \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \;-\; \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2$$

en

$$r(x) \;=\; \sum_{j=1}^{k} z_j \bar{z}_j \;-\; \sum_{j=k+1}^{k+\ell} z_j \bar{z}_j$$

en we noemen (k, ℓ) *de signatuur van* q *danwel* r*.*

Voor niet-gedegenereerde vormen is $k+\ell = n$ en in het positief definiete geval is $k = n$.

Bewijs. We moeten nog laten zien dat de signatuur onder lineaire coördinatentransformaties $T^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ nooit verandert. Definieer

$$E^+(A) \;:=\; \bigoplus_{\lambda>0} \ker(\lambda - A) \qquad \text{en} \qquad E^-(A) \;:=\; \bigoplus_{\lambda<0} \ker(\lambda - A)$$

en verkrijg de splitsingen

$$E^+(A) \,\oplus\, E^-(A) \,\oplus\, \ker A \;=\; E^+(TAT^*) \,\oplus\, E^-(TAT^*) \,\oplus\, (T^*)^{-1}(\ker A)$$

want $x \in \ker TAT^* \iff \langle AT^*x \mid T^*y\rangle = 0$ voor alle $y \in \mathbb{K}^n \iff T^*x \in \ker A$. Pas T^* toe op $0 \neq z \in E^+(TAT^*)$ en ontbind $T^*z = u+v+w$ met $u \in E^+(A)$, $v \in E^-(A)$ en $w \in \ker A$. Dan is

$$0 \;<\; \langle AT^*z \mid T^*z\rangle \;=\; \langle Au \mid u\rangle \;+\; \langle Av \mid v\rangle \;+\; 0$$

en vanwege $\langle Av \mid v\rangle \leq 0$ noodzakelijk $u \neq 0$. Dit betekent

$$T^*(E^+(TAT^*)) \cap \big(E^-(A) \oplus \ker A\big) \;=\; \{0\}$$

en daarmee $\dim E^+(TAT^*) \leq \dim E^+(A)$; uit symmetrie-overwegingen zijn deze dimensies gelijk aan elkaar en dus aan k. Hierdoor verandert ook

$$\ell \;=\; n \,-\, k \,-\, \dim\ker A \;=\; \dim E^-(A)$$

niet onder $(T^*)^{-1}$. □

Voor een complexe kwadratische vorm q kunnen we ook met $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ schalen en men kan laten zien dat er altijd lineaire coördinaten bestaan waarin

$$q(x) \;=\; \sum_{j=1}^{k} z_j^2$$

met $k \leq n$ de rang van q.

Oefeningen

Opgave B.1. Ga na dat de groepsactie (B.1) op $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ de linaire structuur (optellen en scalair vermenigvuldigen van matrices) respecteert.

Opgave B.2. Zij $n \in \mathbb{N}$ oneven. Toon aan dat

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \;=\; \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \;\times\; \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

een direct product is. Wat kan in plaats daarvan voor even dimensies worden bewezen?

Opgave B.3. Bewijs de stelling van Cayley–Hamilton: voor de karakteristieke veelterm $\chi_T(\lambda) = \det(\lambda - T) \in \mathbb{K}[\lambda]$ geldt $\chi_T(T) = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Welke vorm heeft de veelterm $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ van minimale graad $\deg p$ die aan $p(T) = 0$ voldoet?

Opgave B.4. Laat zien dat elke matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ook door middel van een volume-bewarende basistransformatie op Jordan normaalvorm kan worden gebracht.

Opgave B.5. Zij $(A_i)_{i\in I}$ een familie van diagonaliseerbare $n \times n$–matrices. Toon aan dat de A_i dan en slechts dan simultaan diagonaliseerbaar zijn als $A_iA_j = A_jA_i$ voor alle $(i,j) \in I^2$. *Hint:* gebruik inductie naar n.

Opgave B.6. Zij $(A_i)_{i\in I}$ een familie van diagonaliseerbare $n \times n$–matrices met $A_iA_j = A_jA_i$ voor alle$(i,j) \in I^2$. Construeer een matrix A waarvoor $A_i = p_i(A)$ voor alle $i \in I$ met welgekozen veeltermen $p_i \in \mathbb{K}[t]$. *Hint:* pas opgave B.5 toe.

Opgave B.7. Verifieer dat de $\mathrm{SU}(n)$–banen op $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ van de (restrictie van de) groepsactie (B.2) overeenstemmen met de $\mathrm{U}(n)$–banen.

Opgave B.8. Ga na dat de matrices

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\in\; M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

een lichaam isomorf met $\mathbb{C}$ vormen en geef een meetkundige interpretatie.

Opgave B.9. Construeer voor $S \in \mathrm{SO}(3)$ een vector $v \in \mathbb{R}^3$ met de eigenschap, dat S de rotatie rond v met hoek $\|v\|$ is. Concludeer dat $\mathrm{SO}(3)$ homeomorf is met $\mathbb{RP}^3$, de projectieve ruimte die uit $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ kan worden verkregen door x en $-x$ met elkaar te identificeren. *Hint:* S^3 ontstaat ook door alle punten in de rand van $\overline{U_{2\pi}(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ met elkaar te identificeren.

Opgave B.10. Laat zien dat elke matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ een logarithme heeft, dat wil zeggen een matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ met $T = \exp A$.

Opgave B.11. Toon aan dat $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dan en slechts dan een reëel logarithme heeft als $T = S^2$ het kwadraat van een matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ is.

Opgave B.12. Ga na dat $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SU}(n)$ een n–voudige overdekking van $\mathrm{U}(n)$ is.

Opgave B.13. Formuleer en bewijs voor $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ een analogon van stelling B.1.

Opgave B.14. Verifieer dat $\mathrm{SO}(n)$ voor even n het niet-triviale centrum $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ heeft en dat

$$\mathrm{O}(n) \;=\; \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(n)$$

voor oneven n een direct product is.

Opgave B.15. Zij $r : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie die aan de parallellogram-identiteit

$$r(x+y) + r(x-y) \;=\; 2r(x) + 2r(y)$$

voldoet. Laat zien dat r een Hermitese vorm is.

Opgave B.16. Zij $q : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ een complexe kwadratische vorm. Construeer een symmetrische matrix $A = A^{\mathrm{T}} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ met de eigenschap

$$\bigwedge_{z \in \mathbb{C}^n} \quad q(z) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} z_i z_j$$

en controleer dat A door q eenduidig bepaald is.

Opgave B.17. Ga na dat $A \mapsto \mathrm{trace}(A^2)$ een kwadratische vorm op $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definieert en bereken de signatuur.

Opgave B.18. Verifieer dat $A \mapsto \det A$ een kwadratische vorm op

$$P \;=\; \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{trace}\, A = 0 \right\}$$

definieert en schets de verzameling van nilpotente matrices in P.

Opgave B.19. Zij $B : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ bilineair met de eigenschap $B(x,y) = 0 \Leftrightarrow B(y,x) = 0$ voor alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. Toon aan dat dat $q(z) := B(z,z)$ een kwadratische vorm definieert. *Hint:* laat zien dat er voor B twee mogelijkheden zijn, het orthogonale geval $B(x,y) = B(y,x)$ voor alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ en het symplectische geval $B(x,y) = -B(y,x)$ voor alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. Heeft q de extra eigenschap van B eigenlijk nodig?