Hertentamen functionaalanalyse 15 april 2020

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op de ruimte $C([0,\pi],\mathbb{R})$ van reëelwaardige continue functies op het interval $[0,\pi]$ de uitdrukking

$$\langle f \mid g\rangle \quad := \quad \int_0^\pi f(t)g(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

voor alle $f, g \in C([0,\pi],\mathbb{R})$.

(*i*) Ga na dat dit een inproduct op $C([0,\pi],\mathbb{R})$ definieert.

(*ii*) Defineer $f_n \in C([0,\pi],\mathbb{R})$ door $f_n(t) = \cos^n t = (\cos t)^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en laat zien dat de rij $(f_n)_n$ niet puntsgewijs convergeert naar enige functie uit $C([0,\pi],\mathbb{R})$.

(*iii*) Bereken het inproduct $\langle f_m \mid f_n\rangle$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ en toon aan dat de rij $(f_n)_n$ naar de nulfunctie convergeert ten aanzien van de door het inproduct geïnduceerde norm.

(*iv*) Voer de eerste drie stappen van de Gram–Schmidt-procedure uit voor de rij $(f_n)_n$ en bewijs dat dit leidt tot het orthonormale stelsel e_1, e_2, e_3, waarvoor er constanten c_{nk} zijn met

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{11}f_1 \\ e_2 &= c_{12}f_1 + c_{22}f_2 \\ e_3 &= c_{13}f_1 + c_{23}f_2 + c_{33}f_3 \end{aligned}$$

en $c_{kk} > 0$, $k = 1, 2, 3$.

(v) Bepaal de orthogonale projectie $g_n = \pi_2(f_n)$ van f_n op de lineaire deelruimte L die is opgespannen door f_1 en f_2.

2. Gebruik op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ het complete orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{\ln k}(3e_{2k-1} - \mathrm{i}e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{\ln k}(\mathrm{i}e_{2k-1} + 3e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

(i) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(ii) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

(iii) Laat zien dat T een compacte operator is.

(iv) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(v) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

3. Definieer op $C([0,1],\mathbb{C})$ de vermenigvuldigingsoperator V d.m.v.

$$V(f)(t) \ := \ v(t) \cdot f(t)$$

waarbij $v \in C([0,1],\mathbb{R})$.

(i) Splits het spectrum in puntspectrum, continu spectrum en restspectrum en beredeneer je antwoord.

(ii) Bepaal het essentiële spectrum van V.

Voor $g(t) = \mathrm{e}^t$ gebruik de functionaalrekening om $W := g(V) := \Phi_V(g)$ te definiëren.

(iii) Ga na dat W de door vermenigvuldiging met $w = g \circ v$ gedefinieerde vermenigvuldigingsoperator $W(f)(t) = w(t) \cdot f(t)$ is.