Tentamen functies en reeksen 8 november 2018

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Dominik Engl (groep 1), Davide Alboresi (groep 2) of Lasse Grimmelt (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook laten zien dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 14 deelopgaven tellen even zwaar, de 2 bonus(deel)opgaven tellen iets minder zwaar.
- Boeken, cursusmateriaal (ook van andere cursussen) en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Definieer $f, g : [\pi, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ door middel van $f(x) = x^{-2} \sin x$ en $g(x) = x^{-1} \cos x$.

   (*i*) Ga na dat f en g lokaal Riemann-integreerbaar zijn.

   (*ii*) Laat zien dat de oneigenlijke Riemann-integraal
   $$\int_\pi^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$
   convergeert.

   (*iii*) Toon aan dat de oneigenlijke Riemann-integraal
   $$\int_\pi^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$
   convergeert. *Hint:* gebruik partiële integratie om deze integraal te vergelijken met de integraal in (*ii*). **(z.o.z.)**

2. Beschouw de Fourier-reeks

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad = \quad a_0 \;+\; \sum_{k\geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

van de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 2 & & |x - (2k+\frac{1}{2})\pi| < \frac{1}{4}\pi \\ 1 & & x = (2k+\frac{1}{4})\pi \;\text{ of }\; x = (2k+\frac{3}{4})\pi \\ 0 & \text{als} & |x - k\pi| < \frac{1}{4}\pi \\ -1 & & x = (2k-\frac{1}{4})\pi \;\text{ of }\; x = (2k-\frac{3}{4})\pi \\ -2 & & |x + (2k+\frac{1}{2})\pi| < \frac{1}{4}\pi \end{cases} \qquad \text{voor een } k \in \mathbb{Z}.$$

Hint: neem $k = 0$ en maak een plaatje van f op $[-\pi, \pi]$.

(i) Toon aan dat (1) puntsgewijs naar f convergeert.

(ii) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Je hoeft uitdrukkingen in elementaire functies $(\exp, \sin, \cos, \ldots)$ niet verder uit te werken.

(iii) Op welke intervallen $I \subseteq [-\pi, \pi]$ convergeert (1) uniform naar f ?

($bonus$) Maak een schets van

$$\sum_{k=-\ell}^{\ell} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad = \quad a_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

voor ℓ "groot" en leg uit hoe "groot" je ℓ hebt gekozen en waarom (het gaat er niet om een expliciet getal voor ℓ te noemen, maar om de reden te geven waarom je schets deze vorm heeft).

3. De coëfficiënten van de machtreeks

$$\sum_{k\geq 0} \left(\frac{1-(-1)^k}{5^k} + \frac{1+(-1)^k}{2^k}\right) z^k \tag{2}$$

duiden we aan met c_k.

(i) Bereken $\liminf_{k\to\infty} |\frac{c_{k+1}}{c_k}|$ en $\limsup_{k\to\infty} |\frac{c_{k+1}}{c_k}|$ en concludeer dat $\lim_{k\to\infty} |\frac{c_{k+1}}{c_k}|$ niet bestaat.

(ii) Bereken de convergentiestraal ρ van (2). **(z.o.z.)**

4. Voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schrijf $\mathcal{F}(f) = (c_k)_k$.

   (i) Toon aan dat indien er een $\gamma > 0$ bestaat met de eigenschap

$$|c_k| \le \frac{\gamma}{1 + |k|^3} \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{Z}$$

   dan is f continu differentieerbaar.

   (ii) Bewijs dat indien er $\Gamma > 0$ en $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ bestaan met de eigenschap

$$|c_k| \le \frac{\Gamma}{1 + |k|^{p+2}} \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{Z}$$

   dan is $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

5. Zij $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continu differentieerbaar met $Df(0) = \text{id}$ en $g(x) = f(x) - x$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Laat zien dat er $\delta > 0$ bestaat met

$$\|Dg(x)\| \;\le\; \frac{1}{2} \quad \text{voor alle } x \in \overline{B(0;\delta)}.$$

   Gebruik dit voor

$$\|g(x) - g(y)\| \;\le\; \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \text{voor alle } x, y \in \overline{B(0;\delta)}$$

   en concludeer dat

$$\|f(x) - f(y)\| \;\ge\; \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \text{voor alle } x, y \in \overline{B(0;\delta)}.$$

Daarmee is f injectief op $\overline{B(0;\delta)}$ met continue inverse $f^{-1} : f(\overline{B(0;\delta)}) \longrightarrow \overline{B(0;\delta)}$; dit en het volgende hoef je allemaal niet te bewijzen. Er bestaat $\gamma > 0$ met $\det Df(x) \neq 0$ voor alle $x \in B(0;\gamma)$. Definieer $\varepsilon := \min\{\delta, \gamma\}$. Het beeld $f(\{\|x\| = \varepsilon\})$ van de rand van $B(0;\varepsilon)$ heeft tot $f(0)$ een positieve afstand

$$d \;:=\; \text{dist}(f(0), f(\{\|x\| = \varepsilon\})) \;=\; \min\{\|f(0) - f(x)\| \mid \|x\| = \varepsilon\} \;>\; 0$$

(omdat $\{\|x\| = \varepsilon\}$ (rij)compact is). Definieer $V := B(f(0); \tfrac{1}{2}d)$. **(z.o.z.)**

(*ii*) Voor $y \in V$ willekeurig maar vast definieer

$$h(x) \quad := \quad \|f(x) - y\|^2 \quad = \quad \langle f(x) - y \mid f(x) - y \rangle$$

en ga na dat er een $z \in B(0; \varepsilon)$ bestaat met $Dh(z) = 0$.

(*iii*) Toon aan dat $f(z) = y$ en bewijs hiermee dat $V \subseteq f(B(0;\varepsilon))$. *Hint:* bereken $Dh(z)v$, $v \in \mathbb{R}^n$ in termen van $Df(z)v$, $f(z)$ en y.

Dit betekent dat de beperking $f : U \longrightarrow V$ van f tot $U := f^{-1}(V)$ ook surjectief is, dus bijectief.

(*iv*) Toon aan dat $f^{-1} : V \longrightarrow U$ (totaal) differentieerbaar is.

(*bonus*) Bewijs de volgende stelling. Voor continu differentieerbare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ met $\det Df(a) \neq 0$ voor een $a \in \mathbb{R}^n$ bestaan open deelverzamelingen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ met $a \in U$ en $f(a) \in V$ zodanig, dat $f(U) = V$, de inverse $f^{-1} : V \longrightarrow U$ bestaat en (totaal) differentieerbaar is.

Deze stelling staat bekend als de inverse functie stelling en wordt meestal geformuleerd voor $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ open.