RHEIN.-WESTF.TECHN.HOCHSCHULE AACHEN
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Heinz Hanßmann

Aachen, den 4.5.2007

4. Übungsblatt zur Vorlesung Hamiltonsche Dynamische Systeme

9. Untersuchen Sie "Colombo's Kreisel" auf S^2:

$$H_{\lambda,\mu}(x,y,z) \;=\; -\frac{1}{2}(z-\lambda)^2 \;+\; \mu\, y \;.$$

(Bemerkung: Dieses dynamische System modelliert den (gemittelten) Einfluß der Sonne auf die Bewegung eines sich um seine Achse drehenden Planeten.)

10. Sei $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, daß das Spatprodukt

$$\{f,g\}_K \;:=\; \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla K \rangle$$

eine Poissonklammer $\{\ ,\ \}_K$ auf $\mathbb{R}^3$ ist. Sei weiter $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Wie verhalten sich die Flüsse von X_H auf $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_K)$ und von X_K auf $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_H)$ zueinander?

11. Die Lie-Klammer zweier Vektorfelder X, Y läßt sich am elegantesten definieren, wenn man Vektorfelder als Derivationen $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ auffaßt, d.h. als lineare Abbildungen, welche der Leibnizregel genügen; setze

$$[X,Y](f) \;:=\; X(Y(f)) \;-\; Y(X(f)) \;.$$

a) Zeigen Sie, daß die Lie-Klammer von zwei Koordinatenbasisfeldern $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ verschwindet. Sei nun M eine Poissonmannigfaltigkeit. Beweisen Sie für beliebige Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$

$$[X_f, X_g] \;=\; -X_{\{f,g\}} \;.$$

In diesem Zusammenhang spielt der Satz von Frobenius eine wichtige Rolle: Sind die linear unabhängigen Vektorfelder $\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ "in Involution", d.h. gibt es $h_{ij}^k \in C^\infty(M)$ mit

$$[X_i, X_j] \;=\; \sum_{k=1}^{\ell} h_{ij}^k \cdot X_k \;,$$

so existieren um jeden Punkt lokale Koordinaten $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in welchen die X_i Linearkombinationen der ersten ℓ Koordinatenbasisfelder sind.
b) Vervollständigen Sie hiermit den Beweis des Satzes von Darboux.