Hertentamen analyse A op 31 mei 2012

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Jaap Eldering, Jan van Zweeden, Sietske Tacoma of Ori Yudilevich).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[10]** Definieer $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ op het maximaal mogelijke domein. Bereken $\lim_{x\to 0} f(x)$ en bewijs daarmee dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Herinnering: de oneigenlijke limiet van f voor $x \to \infty$ kan met behulp van de substitutie $y = \dfrac{1}{x}$ worden bepaald.

2. **[30]** Beschouw $f(x) = \sinh(x|x|)$; hierbij mag je gebruiken dat de hyperbolische sinus willekeurig vaak differentieerbaar is en als afgeleide de hyperbolische cosinus heeft.

   (*i*) Bewijs dat f in elk punt $x \in \mathbb{R}$ differentieerbaar is.

   (*ii*) Bepaal de afgeleide f' en ga na dat deze op heel $\mathbb{R}$ continu is.

   (*iii*) In welke punten $x \in \mathbb{R}$ is f twee keer differentieerbaar?

3. **[10]** Zij $A \subseteq \mathbb{R}$ een open verzameling. Laat zien dat A geen minimum heeft.

4. **[20]** Zij (V, d) een metrische ruimte en $A \subseteq V$. Toon aan dat $a \in V$ limietpunt van A is, dan en slechts dan als er een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in A bestaat met $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

5. **[30]** De functie $f : [1,2] \longrightarrow [0,2]$ wordt gedefinieerd door $f(x) = 0$ indien $x \notin \mathbb{Q}$ en $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q^2}$ indien $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, waar p en $q > 0$ geen gemeenschappelijke delers hebben.

   (i) Zij $a \in [1,2]$ en $\ell \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$. Definieer $\Delta := \{\mathrm{d}(a, 1+\frac{j}{k}) \mid j = 0, \ldots, k;\ k = 1, \ldots, \ell\}$ en ga na dat $\delta := \frac{1}{2}\min\Delta$ aan de volgende eigenschap voldoet: voor alle $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{N}^*$ heeft $\mathrm{d}(\frac{p}{q}, a) < \delta$ tot gevolg dat $q > \ell$.

   (ii) Bewijs dat $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = 0$ voor alle $a \in [1,2]$.

   (iii) Geef aan waarom f op $[1,2]\backslash\mathbb{Q}$ continu is en f in geen enkel punt van $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ continu is.