Hertentamen analyse A op 25 mei 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Sebastiaan Janssens, Janne Kool of Maria Salazar).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Alle (deel)opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ de Euclidische norm $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (i) Bewijs dat er een $\eta > 0$ bestaat met de eigenschap
   $$\|(x,y) - (2,1)\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |y| \leq 2 \ .$$

   (ii) Zij $\eta > 0$ als in (i) gekozen. Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y) - (2,1)\| < \eta$ geldt dat
   $$|\, xy - 2 \,| \leq 2\,|x-2| + 2\,|y-1| \ .$$

   (iii) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} xy = 2$.

2. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,

$(c)\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Geef daarbij precies aan welke rekenregels en standaardlimieten zijn gebruikt. De feiten dat de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ continu is op $[0,\infty[$ en dat de functie $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ continu is op $\mathbb{R}$ mogen daarbij als bekend worden verondersteld.

3. Gegeven is $\varepsilon > 0$, een metrische ruimte (V, d) en een punt $a \in V$.

   (i) Ga na dat er voor iedere $x \in B(a;\varepsilon)$ een positief getal n bestaat met $B(x;\frac{1}{n}) \subseteq B(a;\varepsilon)$.

   (ii) Laat zien dat in het geval $V = \mathbb{R}^p$ (met de Euclidische afstand) een $q \in \mathbb{Q}^p$ bestaat met $a \in B(q;\varepsilon)$.

   (iii) Toon aan dat elke open deelverzameling van $\mathbb{R}$ kan worden geschreven als aftelbare vereniging van open intervallen.

4. De verzameling $C \subseteq \mathbb{R}^3$ bestaat uit de punten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $0 \leq z \leq 4$, en $U = \{(x,y,z) \in C \mid x > 0\}$.

   (a) Toon aan dat C een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ is.

   (b) Bewijs dat de verzameling U open is in C.

   (c) Is U ook open in $\mathbb{R}^3$?

5. Definieer de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 1$ en $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$.

   (i) Toon aan dat voor alle oneven $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $a_{n-1} \leq a_{n+1}$ en $a_n \geq a_{n+2}$.

   (ii) Bewijs dat de deelrijen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ en $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ convergeren.

   (iii) Bepaal de limieten $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$ en $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$ en concludeer dat ook de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zelf convergent is.