Inleiding Analyse 2010

Opgaven uit vroegere (her)tentamens

Opgave A

Zij (V, d) een metrische ruimte. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V. Zij $a \in V$.

(a) Stel dat de uitspraak
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
niet waar is. Toon aan dat $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat
$$d(a_n, a) \geq \varepsilon$$
voor *oneindig veel* indices n.

(b) Zij nu D een rij-compacte deelverzameling van V en veronderstel dat $a \in D$ en ook $a_n \in D$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de eigenschap heeft dat *iedere* convergente deelrij limiet a heeft. Bewijs dat
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(c) Definieer een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ zó dat *iedere* convergente deelrij limiet 1 heeft, terwijl de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niet* convergeert.

Opgave B

Definieer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ door
$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2).$$

(a) Bepaal alle stationaire punten van f (terzijde: men spreekt ook vaak over "kritieke punten").

(b) Zij
$$D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
Neemt f op D een maximum en een minimum aan? Zo ja, in welke punten?

(c) Wat is het beeld van D onder f?

(d) We bekijken nu weer f als gedefinieerd op $\mathbb{R}^2$. Een zadelpunt is een stationair punt dat noch een lokaal maximum noch een lokaal minimum is. Heeft f zadelpunten? Zo ja, waar?

Opgave C

Definieer de functie $f(x) = x^x$ op het open interval $]0, \infty[$ van alle positieve reële getallen.

(a) Werk de formule voor $\log f$ uit en schrijf f in termen van de exponentiële functie.

(b) Laat zien dat f op $]0, \infty[$ geen bovengrens heeft en bereken $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Bepaal de stationaire punten van f.

(d) Neemt f op $]0, \infty[$ een minimum en/of een maximum aan? Zo ja, waar?

Opgave D

Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vier keer differentieerbaar en veronderstel dat $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$.

(a) Bewijs dat een interval I bestaat zó dat 0 een inwendig punt van I is en bovendien voor $x \in I$ geldt dat

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\quad \text{voor } x > 0, \\ f''(x) < 0 &\quad \text{voor } x < 0. \end{aligned}$$

(b) Toon aan dat voor $x \in I$ en $x \neq 0$ geldt $f'(x) > 0$.

(c) Toon aan dat de restrictie van f tot I monotoon strikt stijgend is.

(d) Zij g de inverse van de restrictie van f tot I. Bewijs dat g *niet* differentieerbaar is in $y = 0$.

(e) Bekijk nu het speciale geval $f(x) = x^3(1 + x^3)$. Leidt een expliciete uitdrukking voor de inverse $g(y)$ af.

Opgave E

Zij $a < b \in \mathbb{R}$ en $I := [a, b]$ een gesloten en begrensd interval, verder $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ een monotone functie (d.w.z. f is monotoon stijgend of monotoon dalend). Bewijs dat f over I Riemann-integreerbaar is of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave F

Zij $I := [a, b]$ voor zekere reële getallen a, b met $b > a$. Zij $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en veronderstel dat f' begrensd is op I. We roepen in herinnering dat de variatie van f over een interval J, met $J \subset I$, is gedefinieerd door

$$\operatorname*{var}_J f := \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in J\}$$

en dat we met $\ell(J)$ de lengte van J aanduiden. In het volgende is V steeds een verdeling van I met maas (wijdte) $m(V)$, is $\underline{S}(f, V)$ de ondersom van f bij de verdeling V en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom, en is Ξ een rij strooipunten bij V.

(a) Toon aan dat een constante $M > 0$ bestaat zó dat

$$\operatorname*{var}_J f \leq M\,\ell(J)$$

voor ieder interval $J \subset I$.

(b) Toon aan dat voor iedere verdeling V van I geldt

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq M\,\ell(I)\,m(V)$$

waarbij M de constante uit (a) is.

(c) Toon aan dat een constante $K > 0$ bestaat zó dat voor iedere keuze van V en Ξ geldt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f, V, \Xi) \right| \leq K\,m(V).$$

Hierbij is $S(f, V, \Xi)$ de Riemann-som van f voor V en Ξ.