Tentamen inleiding analyse 22 april 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Sebastiaan Janssens, Janne Kool of Maria Salazar).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[36]** Definieer $f(x,y) = y^x$ door middel van

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0,\infty[\, \times\,]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \exp(x \ln y) \end{array} .$$

   (i) Ga na dat $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 1$ voor alle $b > 0$.

   (ii) Laat zien dat $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0$ voor alle $a > 0$.

   (iii) Toon aan dat de limiet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat.

2. **[18]** Zij (V,d) een metrische ruimte met de afstandfunctie d. We definiëren een functie $\tilde{d} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ met de formule

$$\tilde{d}(x,y) \quad = \quad \min\left(1, d(x,y)\right) \quad \text{voor alle } x, y \in V.$$

   Bewijs dat $(V, \tilde{d})$ ook een metrische ruimte is.

3. **[24]** Zij $f : V \longrightarrow W$ een afbeelding tussen metrische ruimten. Toon aan dat f in $a \in V$ dan en slechts dan continu is, als voor elke convergente rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in V met limiet a de rij $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ in W convergent is met limiet $f(a)$.

4. **[12]** Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in 0 met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$. Laat zien dat f positieve waarden en negatieve waarden heeft.