Tentamen analyse B op 24 juni 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Bart van den Dries, Jaap Eldering of Janne Kool).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Alle (deel)opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Een functie $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heet Lipschitz-continu als

$$\bigvee_{C>0} \quad \bigwedge_{x,y\in[a,b]} \quad |h(x) - h(y)| \;\; \leq \;\; C \cdot |x - y| \;\; .$$

(*i*) Ga na dat elke Lipschitz-continue functie h ook uniform continu is.

(*ii*) Zij $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Laat zien dat g Lipschitz-continu is.

(*iii*) Zij $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar en

$$F(x) \;\; := \;\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \;\; .$$

Toon aan dat $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-continu is.

(*iv*) Is F uit (*iii*) altijd differentieerbaar? Bewijs deze bewering of geef een tegenvoorbeeld.

2. Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $a, b \in I$ met $a < b$.

   (i) Schrijf $f(x) = f(a) + \phi(x) \cdot (x - a) = f(b) + \psi(x) \cdot (x - b)$ met continue functies $\phi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (d.w.z. definieer deze en controleer de eigenschappen) en verifieer $\phi(b) = \psi(a)$.

   (ii) Definieer

$$\begin{array}{rcl} \chi : [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \chi(t) := \begin{cases} \phi(b + t(b-a)) & -1 \leq t < 0 \\ & \text{als} \\ \psi(a + t(b-a)) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

   en laat zien dat voor w strikt tussen $\phi(a)$ en $\psi(b)$ een $t \in]-1,1[$ bestaat met $\chi(t) = w$.

   (iii) Zij w strikt tussen $\phi(a)$ en $\psi(b)$, leg uit waarom $y, z \in [a,b]$ bestaan met

$$w = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} .$$

   Hint: gebruik χ uit (ii).

   (iv) Concludeer dat voor elke w strikt tussen $f'(a)$ en $f'(b)$ een $c \in]a,b[$ bestaat met $f'(c) = w$ (de stelling van Darboux).

3. Zij $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uniform continu, in deze opgave zoeken we een continue 'voortzetting' $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ met $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$.

   (i) Laat zien dat er hooguit één voortzetting g kan bestaan.

   (ii) Zij $(x_n)_n$ een rijtje in $\mathbb{Q}$ dat in $\mathbb{R}$ convergeert, toon aan dat $(f(x_n))_n$ een convergente rij in $\mathbb{R}^p$ is.

   (iii) Construeer de gezochte functie g en ga na dat g uniform continu is.

   (iv) Geef een voorbeeld van een continue functie $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ die geen op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerde continue voortzetting heeft.