De Cauchy-integraal

Heinz Hanßmann
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands

30 Juni 2013

Samenvatting

We construeren een integraal voor begrensde functies $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die continu zijn of, zoals monotone functies, hooguit discontinuïteiten 'van het eerste soort' hebben.

1 Definitie van de integraal

Zij $a < b \in \mathbb{R}$ en

$$\mathcal{B} \quad = \quad \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ is begrensd} \right\}$$

de (lineaire) ruimte van begrensde functies op $[a, b]$. De norm

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \sup_{[a,b]} |f|$$

maakt van $\mathcal{B}$ een Banachruimte — een volledige genormeerde vectorruimte. Convergentie ten opzichte van de bijbehorende metriek $\mathrm{d}(f, g) = \|f - g\|_\infty$ betekent uniforme convergentie. We gaan de integraal definiëren voor eenvoudige functies en dan door middel van uniforme limieten uitbreiden naar de afsluiting binnen $\mathcal{B}$. De 'eenvoudige functies' zullen de stapfuncties zijn.

Definitie 1 *Onder een verdeling V van $[a, b]$ verstaan we een eindige deelverzameling $V = \{c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b\} \subset [a, b]$ (met stijgende ordening $c_{i-1} < c_i$ binnen V). De maas van V is het getal*

$$m(V) \quad := \quad \max\{c_i - c_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\} \enspace .$$

De collectie van alle verdelingen van $[a, b]$ wordt met $\mathcal{V} = \mathcal{V}([a, b])$ genoteerd.

De vereniging $U = V \cup W$ van twee verdelingen van $[a, b]$ is weer een verdeling en voor de maas geldt dat $m(U) \leq \min\{m(V), m(W)\}$.

Definitie 2 *Voor $A \subseteq [a,b]$ noemen we*

$$\begin{array}{rcccl} \chi_A : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & \chi_A(x) & = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \textit{als} & x \in A \\ 0 & & x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

de karakteristieke functie van A. Een stapfunctie is van de vorm

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{]c_{i-1},c_i[} + \sum_{i=0}^{n} z_i \chi_{\{c_i\}}$$

waarbij $y_i, z_i \in \mathbb{R}$. Onder de integraal van een stapfunctie verstaan we het getal

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (c_i - c_{i-1})$$

(het georienteerde oppervlak tussen de grafiek van f en de x–as).

De stapfuncties vormen een lineaire deelruimte $\mathcal{S} < \mathcal{B}$, voor de som neem de vereniging van de verdelingen, en

$$I(f) \;:=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

definieert een lineaire afbeelding $I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Stelling 3 *Zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ de afsluiting van $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$. Dan is er een unieke continue extensie van I naar $K : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

De afsluiting $\mathcal{A}$ is net als $\mathcal{S}$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{B}$, zie stelling 6 in sectie 2.

Bewijs: Vanwege

$$|I(f)| \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot (c_i - c_{i-1}) \;\leq\; \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} c_i - c_{i-1} \;=\; (b-a) \cdot \|f\|_\infty$$

is I Lipschitz-continu met Lipschitz-constante $\gamma = b - a$ en daarmee uniform continu. Pas nu Stelling 4.57 uit Sectie 4.8 in [1] toe. $\square$

Ook K is Lipschitz-continu met Lipschitz-constante $\gamma = b - a$.

Definitie 4 *Zij $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie. De functie f heet (Cauchy)-integreerbaar over $[a,b]$ als $f \in \mathcal{A}$ en dan noemen we het getal*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; K(f)$$

de (Cauchy)-integraal van f over het interval $[a,b]$.

De constante functie $f(x) \equiv c$ is een stapfunctie met Cauchy-integraal

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad c \cdot (b-a) \ .$$

Voorbeeld 5 Voor $f(x) = x$ op $I = [0,1]$ beschouwen we de verdelingen

$$V_n \quad := \quad \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1 \right\} \ .$$

De stapfuncties

$$f_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i-1}{2n}) \chi_{]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[} \ + \ \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) \chi_{\{\frac{i}{n}\}}$$

voldoen aan $f_n(x) = f(x)$ als $x = \frac{i}{n}$ en voor $x \notin V_n$ bestaat een index i met $x \in]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[$ waardoor

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| \quad &= \quad |f(x) - f(\frac{2i-1}{2n})| \quad = \quad |x - \frac{2i-1}{2n}| \\ &\leq \quad \max\left\{ \frac{i}{n} - \frac{2i-1}{2n}, \frac{2i-1}{2n} - \frac{i-1}{n} \right\} \quad = \quad \frac{1}{2n} \ . \end{aligned}$$

Dit impliceert

$$\|f - f_n\|_\infty \quad \leq \quad \frac{1}{2n} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

en dus Cauchy-integreerbaarheid van f, met Cauchy-integraal

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \ - \ \frac{1}{2n} \quad = \quad \frac{1}{2} \ . \qquad \triangle$$

In het vervolg korten we Cauchy-integraal en Cauchy-integreerbaar meestal af tot integraal danwel integreerbaar.

2 Rekenregels voor integratie

We behandelen enkele voor de hand liggende rekenregels voor de integraal.

Stelling 6 *Laat $f, g \in \mathcal{B}$ begrensde functies zijn en $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(*i*) *Is f integreerbaar over $[a,b]$, dan is λf dat ook en bovendien geldt dat*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(*ii*) *Zijn f en g integreerbaar over $[a,b]$ dan is $f+g$ dat ook en bovendien geldt dat*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ + \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Bewijs: Voor een rij stapfuncties $(f_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$ met $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ zijn ook de λf_n stapfuncties en geldt volgens Lemma 3.14 in Sectie 3.1 van [1] dat $\lim_{n\to\infty} \lambda f_n = \lambda f$.

Is bovendien $(g_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$ een rij stapfuncties met $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, dan zijn ook de $h_n = f_n + g_n$ stapfuncties (verenig de verdelingen van f_n en g_n) en geldt volgens Lemma 3.12 in Sectie 3.1 van [1] dat $\lim_{n\to\infty} h_n = f + g$.

Voor de lineariteit van de integraal pas Opgave 3.31 in [2] toe op de afbeelding K en de rij $(\lambda f_n + g_n)_n$ met limiet $\lambda f + g$ en gebruik nog een keer Lemma's 3.12 en 3.14 uit Sectie 3.1 van [1]. □

Lemma 7 *Laat $f, g \in \mathcal{A}$ integreerbare functies zijn en veronderstel dat (puntsgewijs) $f \leq g$ op $[a, b]$. Dan geldt dat*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Bewijs: Voor rijen stapfuncties $(f_n)_n, (g_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$ met $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ is niet noodzakelijk $f_n \leq g_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daarom beschouwen we $h := g - f \geq 0$ en de stapfuncties $h_n := \max\{g_n - f_n, 0\}$. Dan is

$$0 \quad \leq \quad \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$$

voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $(h_n)_n$ convergeert vanwege

$$\bigwedge_{x\in[a,b]} \qquad |h(x) - h_n(x)| \quad \leq \quad |g(x) - g_n(x)| \ + \ |f(x) - f_n(x)|$$

uniform met limiet h. Pas nu Lemma 3.19 uit Sectie 3.1 van [1] toe. □

Stelling 8 *Zij $f \in \mathcal{A}$ integreerbaar. Dan is ook $|f| \in \mathcal{A}$ en er geldt dat*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \quad \leq \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ .$$

Bewijs: Voor stapfuncties $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ is ook $|f_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f|$ en hebben we vanwege $\pm f \leq |f| = f + \max\{-2f, 0\}$ (puntsgewijs) en lemma 7 dat

$$\pm \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ .$$

□

Daarmee zijn voor $f, g \in \mathcal{A}$ ook de functies $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|g-f|$ en $\max\{f, g\} = f + g - \min\{f, g\}$ integreerbaar.

Stelling 9 *Zij $a < c < b$. Een begrensde functie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is dan en slechts dan integreerbaar over $[a,b]$ als f integreerbaar is over zowel $[a,c]$ als $[c,b]$. Bovendien geldt dan dat*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Bewijs: Neem c op in de verdelingen voor de stapfuncties $f_n \to f$. □

Definieer

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; 0 \quad \text{en} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Gevolg 10 *Zij I een gesloten en begrensd interval en $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ een integreerbare functie. Dan geldt voor alle $a, b, c \in I$ dat*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Bewijs: Indien a, b en c niet alle verschillend zijn is minstens een van de drie integralen gelijk aan nul en de gelijkheid van de overgebleven integralen evident. Indien a, b en c alle verschillend zijn kunnen we de integralen waarvoor de ondergrens kleiner is dan de bovengrens naar de andere kant van de vergelijking brengen en stelling 9 toepassen. □

Stelling 11 *Zij $f, g \in \mathcal{B}$ een tweetal begrensde functies die buiten de eindige verzameling $W \subset [a,b]$ overeenstemmen. Dan is $f \in \mathcal{A}$ dan en slechts dan als $g \in \mathcal{A}$ en geldt in het geval van integreerbaarheid dat*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Bewijs: Neem W op in de verdelingen voor de stapfuncties $f_n \to f$ en $g_n \to g$. □

3 Integratie van continue functies

We karakteriseren $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ opdat we gemakkelijker kunnen bepalen of een functie integreerbaar is. Voor een functie $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ die in $y \in \mathbb{R}$ een linker limiet heeft definiëren we

$$f(y-) \;:=\; \lim_{x \nearrow y} f(x)$$

en net zo

$$f(y+) \;:=\; \lim_{x \searrow y} f(x) \;.$$

Lemma 12 *Zij $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ een functie die in elk punt $y \in [a,b]$ een linker limiet en een rechter limiet heeft. Dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een verdeling $\{c_0, \ldots, c_n\}$ van $[a,b]$ zodanig, dat voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ en voor alle $x, z \in \,]c_{i-1}, c_i[$ geldt dat $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$.*

Het bewijs is niet moeilijk als we ervan gebruik maken dat de rij-compacte verzameling $[a,b]$ ook *compact* is, zie hiervoor [4] of de appendix.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ vast en $y \in [a,b]$. Dan bestaat $\delta = \delta(\varepsilon, y) > 0$ zodanig, dat voor $x \geq a$ met $y - \delta < x < y$ geldt dat $|f(x) - f(y-)| < \frac{\varepsilon}{2}$ en voor $x \leq b$ met $y < x < y + \delta$ geldt dat $|f(x) - f(y+)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De intervallen $]y - \delta(\varepsilon, y), y + \delta(\varepsilon, y)[$ vormen een open overdekking van $[a,b]$, dat wil zeggen

$$[a,b] \quad \subseteq \quad \bigcup_{y \in [a,b]}]y - \delta(\varepsilon, y), y + \delta(\varepsilon, y)[\ .$$

Omdat $[a,b]$ *compact* is volstaan hiervoor al eindig veel van deze intervallen, dat wil zeggen er bestaan eindig veel punten $y_1 < y_2 < \ldots < y_m \in [a,b]$ met

$$[a,b] \quad \subseteq \quad \bigcup_{k=1}^{m}]y_k - \delta(\varepsilon, y_k), y_k + \delta(\varepsilon, y_k)[\ .$$

Dan zijn in het bijzonder de intervallen $]y_k + \delta(\varepsilon, y_k), y_{k+1} - \delta(\varepsilon, y_{k+1})[$ niet leeg waar de intervallen van de vereniging overlappen; kies punten $w_k \in]y_k + \delta(\varepsilon, y_k), y_{k+1} - \delta(\varepsilon, y_{k+1})[$, $k = 1, \ldots, m-1$. Vanwege $a \in B(y_1, \delta(\varepsilon, y_1))$ en $b \in B(y_m, \delta(\varepsilon, y_m))$ heeft de verdeling

$$V \quad = \quad \{a, b\} \ \cup \ \{y_k \mid k = 1, \ldots, m\} \ \cup \ \{w_k \mid k = 1, \ldots, m-1\}$$

de gewenste eigenschap: als we $w_0 := a$ en $w_m := b$ stellen zijn er voor $c_i \in V$ met $i \in \{1, \ldots, n\}$ twee mogelijkheden.

1. De index $i = 2k - 1$ is oneven en $c_i = y_k$ terwijl $c_{i-1} = w_{k-1}$. Dit betekent $c_{i-1} \in]c_i - \delta(\varepsilon, c_i), c_i[$ en daarmee geldt voor $x, z \in]c_{i-1}, c_i[$ dat

$$|f(x) \ - \ f(z)| \quad \leq \quad |f(x) - f(c_i-)| \ + \ |f(c_i-) - f(z)| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2} \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

2. De index $i = 2k$ is even en $c_i = w_k$ terwijl $c_{i-1} = y_k$. Dit betekent $c_i \in]c_{i-1}, c_{i-1} + \delta(\varepsilon, c_i)[$ en daarmee geldt voor $x, z \in]c_{i-1}, c_i[$ dat

$$|f(x) \ - \ f(z)| \quad \leq \quad |f(x) - f(c_{i-1}+)| \ + \ |f(c_{i-1}+) - f(z)| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2} \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

In beide gevallen impliceert $x, z \in]c_{i-1}, c_i[$ dat $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. $\square$

Stelling 13 *Een begrensde functie $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is dan en slechts dan integreerbaar over $[a,b]$ als h in elk punt $c \in [a,b]$ een linker limiet en een rechter limiet heeft.*

In het bijzonder zijn continue functies en monotone functies integreerbaar.

Bewijs: Stapfuncties $f \in \mathcal{S}$ hebben in elk punt eenzijdige limieten en $h \in \mathcal{A}$ is een uniforme limiet van stapfuncties.

Voor de andere kant kies $\varepsilon > 0$ vast en laat zien dat $B(h; \varepsilon) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Volgens lemma 12 is er een verdeling $V = \{a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b\}$ zodanig, dat

$$c_{i-1} \ < \ x \ < \ z \ < \ c_i \quad \Longrightarrow \quad |h(x) \ - \ h(z)| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2}$$

voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ en alle $x, z \in [a, b]$. Voor $i = 1, \ldots, n$ kies

$$y_i \in [\inf_{]c_{i-1}, c_i[} h, \sup_{]c_{i-1}, c_i[} h]$$

en definieer

$$f := \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{]c_{i-1}, c_i[} + \sum_{i=0}^{n} h(c_i) \chi_{\{c_i\}} . \tag{1}$$

Dan geldt dat $|h(x) - f(x)| = 0$ als $x \in V$ en anders bestaat $i \in \{1, \ldots, n\}$ met $x \in]c_{i-1}, c_i[$ waardoor

$$|h(x) - f(x)| = |h(x) - y_i| \leq \sup_{]c_{i-1}, c_i[} h - \inf_{]c_{i-1}, c_i[} h \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Bij elkaar betekent dit

$$\|h - f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |h - f| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

en ligt de stapfunctie $f \in \mathcal{S}$ zoals gewenst in $B(h; \varepsilon)$. $\square$

Definitie 14 *Voor $h \in \mathcal{B}$ en een verdeling $V \subset [a, b]$ definiëren we de ondersom $\underline{S}(h, V)$ van h bij de verdeling V door*

$$\underline{S}(h, V) := \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) \cdot \inf_{[c_{i-1}, c_i]} h$$

en de bovensom van h bij V door

$$\overline{S}(h, V) := \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) \cdot \sup_{[c_{i-1}, c_i]} h .$$

Voor de stapfunctie (1) kunnen we nu

$$\underline{S}(h, V) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \overline{S}(h, V)$$

afschatten en vanwege lemma 7 ook

$$\underline{S}(h, V) \leq \int_a^b h(x) \, \mathrm{d}x \leq \overline{S}(h, V)$$

voor h zelf. Uit het bewijs van stelling 13 halen we nog het volgende resultaat.

Stelling 15 *Zij h integreerbaar. Dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een verdeling $W \in \mathcal{V}$ zodanig, dat*

$$\overline{S}(h, W) - \underline{S}(h, W) < \varepsilon .$$

Bewijs: Definieer $s_i := \sup_{]c_{i-1},c_i[} h$, $r_i := \inf_{]c_{i-1},c_i[} h$ en daarmee

$$v_i \quad := \quad \max \left\{ \; |s_k - h(c_i)|, \, |s_k - r_l|, \, |r_k - h(c_i)| \; \middle| \; k, l \in \{i, i+1\} \; \right\}$$

voor de verdeling V van (1). De verdeling W bestaat uit $\{a, b\}$ en diegene punten

$$c_i \; \pm \; \frac{\varepsilon}{6nv_i} \;\; , \quad c_i \in V$$

die element van $[a, b]$ zijn. Dan is

$$\begin{aligned}
\overline{S}(h, W) \; - \; \underline{S}(h, W) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} (c_i - \frac{\varepsilon}{6nv_i} \; - \; c_{i-1} - \frac{\varepsilon}{6nv_{i-1}})(s_i - r_i) \\
&\quad + \; \frac{\varepsilon}{6nv_0} \cdot v_0 \; + \; \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\varepsilon}{6nv_i} \cdot v_i \; + \; \frac{\varepsilon}{6nv_n} \cdot v_n \\
&\leq \quad \frac{\varepsilon}{2} \; + \; \frac{\varepsilon}{3} \quad < \quad \varepsilon \; .
\end{aligned}$$

□

Volgens Stelling 7.28 uit Sectie 7.3 in [1] is een Cauchy-integreerbare functie daarmee in het bijzonder ook Riemann-integreerbaar.

4 Primitieven en integratie

Indien het lukt is primitiveren de snelste methode om een integraal te berekenen.

Definitie 16 *Een primitieve van* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ *is een differentieerbare functie* $F : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *met* $F' = f$.

Lemma 17 *De verzameling van alle primitieven van* f *op* $[a, b]$ *is leeg of gelijk aan* $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ *waarbij* F *een primitieve van* f *is.*

Bewijs: Is F een primitieve van f dan is vanwege $(F + c)' = F' + c' = f + 0$ iedere functie $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ ook een primitieve van f. Is G een tweede primitieve van f dan is de verschilfunctie $H = G - F$ differentieerbaar, met afgeleide $H' = (G - F)' = G' - f = 0$. Volgens Lemma 6.6 in Sectie 6.1 van [1] is $H = c$ constant, dus $G = F + c$. □

Stelling 18 (Hoofdstelling van de infinitesimaalrekening). *Zij* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continu. Dan definieert*

$$F(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

een primitieve van f *op* $[a, b]$ *en voor elke primitieve* G *van* f *geldt dat*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad G(b) \; - \; G(a) \;\; .$$

Bewijs: Om te laten zien dat F in elke $x \in [a,b]$ differentieerbaar is bereken

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \;-\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \;=\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

met behulp van gevolg 10 en gebruik

$$f(x) \;=\; \frac{f(x)}{h}\int_x^{x+h}\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t$$

want hiermee is

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \;=\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}t \;.$$

Voor $\varepsilon > 0$ bestaat $\delta > 0$ met

$$|t-x| \;<\; \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(t)-f(x)| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

(f is immers continu) en na de beperking tot $|h| < \delta$ volgt met stelling 8 dat

$$\left|\,\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\,\right| \;\leq\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \;\leq\; \frac{1}{h}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_x^{x+h}\mathrm{d}t \;<\; \varepsilon \;.$$

Dit betekent

$$f(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

en F is in het bijzonder differentieerbaar. $\square$

Voor elke functie waarvan we een primitieve al kennen kunnen we de integraal nu expliciet berekenen.

Voorbeeld 19 De integraal van een veelterm $p \in \mathbb{R}[x]$ is

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \sum_{k=0}^n p_k x^k\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=0}^n p_k \frac{x^{k+1}}{k+1}\bigg|_a^b \;=\; \sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{p_{\ell-1}}{\ell}\left(b^\ell - a^\ell\right) \;. \qquad \triangle$$

Een functie $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ heet *continu differentieerbaar* indien f differentieerbaar is en bovendien de afgeleide functie f' continu is. De ruimte van alle continu differentieerbare functies op het interval $[a,b]$ noteren we met $C^1[a,b]$.

Stelling 20 (Partiële integratie). *Voor $f, g \in C^1[a,b]$ geldt dat*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(b)g(b) \;-\; f(a)g(a) \;-\; \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Bewijs: Pas stelling 18 toe op de primitieve fg van de continue functie $f'g + fg'$. $\square$

Stelling 21 (Substitutiestelling). *Zij* $\varphi : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ *continu differentieerbaar en* $f \in C^0[\alpha,\beta] = C[\alpha,\beta]$. *Dan geldt dat*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Bewijs: Zij F een primitieve van f op $[\alpha,\beta]$. De integraal aan de rechterkant is dan gelijk aan $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ en uit Stelling 1.56 in Sectie 1.6 van [1], de kettingregel, volgt dat $F\circ\varphi$ een primitieve is van de continue functie $x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Daarmee is de integraal aan de linkerkant eveneens gelijk aan $(F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a)$. □

Niet elke integreerbare functie heeft een primitieve. Een continue en *stuksgewijs lineaire* functie F is buiten de punten in een verdeling V differentieerbaar en de functie

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{als } x \in V \\ F'(x) & \phantom{\text{als }} x \notin V \end{cases}$$

is een stapfunctie. Omgekeerd is de integraal

$$F(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

van een stapfunctie continu en stuksgewijs lineair. Merk op dat de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ van een rij stapfuncties met verdelingen V_n nogal willekeurig kan zijn op de aftelbare vereniging

$$U \quad = \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} V_n \ .$$

Definitie 22 *Een stamfunctie van* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ *is een continue functie* $F : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *die buiten een aftelbare verzameling* $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *differentieerbaar is met* $F'(x) = f(x)$ *voor alle* $x \notin U$.

Stelling 23 *Elke integreerbare functie heeft een stamfunctie.*

Voor het bewijs zie Sectie 8.7 in [4].

Voorbeeld 24 De functie

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \phantom{\text{als }} x \neq 0 \end{cases}$$

heeft de primitieve

$$F(x) \quad = \quad x^2\cos\frac{1}{x} \ - \ \int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad = \quad x\sin\frac{1}{x} \ + \ \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \ - \ C$$

maar geen limieten $f(0\pm)$ en is dus niet Cauchy-integreerbaar over intervallen $[a,b]$ die 0 bevatten. Volgens Voorbeeld 7.36 in Sectie 7.4 van [1] is f wél Riemann-integreerbaar over alle intervallen $[a,b]$. △

Een generalisatie van de Cauchy-integraal die ook de Riemann-integraal omvat is de Lebesgue-integraal. Hiervoor wordt de integraal eerst uitgebreid naar (puntsgewijs) monotone limieten van* stapfuncties. Dit levert de verzameling J van limieten van monotoon stijgende rijen op en voor een monotone limiet

$$g \;=\; \lim_{n\to\infty} g_n \;\in\; J \cup (-J)$$

definieer

$$\int g \,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}x \;.$$

In een tweede uitbreidingsstap worden de bovenintegraal

$$\int^* h \,\mathrm{d}x \;:=\; \inf_{h \le g \in J} \int g \,\mathrm{d}x$$

en de onderintegraal

$$\int_* h \,\mathrm{d}x \;:=\; \sup_{h \ge g \in (-J)} \int g \,\mathrm{d}x$$

gedefinieerd. Dan geldt dat

$$\int_* h \,\mathrm{d}x \;\le\; \int^* h \,\mathrm{d}x$$

en h is Lebesgue-integreerbaar als deze overeenstemmen; de gemeenschappelijke waarde is de Lebesgue-integraal van h. Elke begrensde functie f die een stamfunctie F heeft is Lebesgue-integreerbaar en voor de Lebesgue-integraal van f over $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ geldt dat

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}x \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;.$$

De afgeleide f van de Volterra-functie, zie [3], is begrensd en heeft een primitieve (dus f is Lebesgue-integreerbaar), maar f is niet Riemann-integreerbaar.

Acknowledgements. Ik dank Arjen Baarsma, Timo Kluck, Shan Shah en Jan van Zweeden voor hun opmerkingen.

Referenties

[1] *E.P. van den Ban : Inleiding Analyse* ; diktaat, Universiteit Utrecht (2013)

[2] *E.P. van den Ban : Inleiding Analyse* ; opgaven, Universiteit Utrecht (2013)

[3] *D.M. Bressoud :* Wrestling with the Fundamental Theorem of Calculus ; lecture, Allegheny College (2003)

[4] *J. Dieudonné : Foundations of Modern Analysis* ; Academic Press (1960)

*of bv. van continue functies.

Appendix

Voor de volledigheid bewijzen we nog dat $[a, b]$ compact is.

Definitie 25 *Een metrische ruimte V is compact als elke overdekking $(U_i)_{i\in I}$ door open verzamelingen een eindige deeloverdekking $V \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ bevat.*

Stelling 26 (Heine–Borel). *Het interval $[a, b]$ is compact.*

Bewijs: We bewijzen eerst dat $[0, 1]$ compact is. Hiervoor werken we uit het ongerijmde en nemen aan dat er een open overdekking $(U_i)_{i\in I}$ zonder eindige deeloverdekking is. Schrijf $y_0 := \frac{1}{2}$, dan is

$$\overline{B(y_0; \tfrac{1}{2})} \;=\; [0, 1] \;=\; [0, y_0] \cup [y_0, 1] \;=\; \overline{B(\tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{4})} \cup \overline{B(\tfrac{3}{4}; \tfrac{1}{4})}$$

en minstens één van deze, zeg $\overline{B(v; \frac{1}{4})}$, is niet in een eindige vereniging van de U_i bevat (want anders zou uiteindelijk ook $[0, 1]$ zelf in een eindige vereniging van de U_i bevat zijn). Noem $y_1 := v$ en gebruik

$$\overline{B(y_1; \tfrac{1}{4})} \;=\; [y_1 - \tfrac{1}{4}, y_1] \cup [y_1, y_1 + \tfrac{1}{4}] \;=\; \overline{B(y_1 - \tfrac{1}{8}; \tfrac{1}{8})} \cup \overline{B(y_1 + \tfrac{1}{8}; \tfrac{1}{8})} \;.$$

Minstens één van deze, zeg $\overline{B(w; \frac{1}{8})}$, is niet in een eindige vereniging van de U_i bevat (want anders zou uiteindelijk ook $\overline{B(y_1; \frac{1}{4})}$ zelf in een eindige vereniging van de U_i bevat zijn). Op deze manier construeren we inductief een rijtje $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ waarvoor $|y_{n+1} - y_n| = 2^{-(n+2)}$ en $\overline{B(y_n; 2^{-(n+1)})} = [y_n - 2^{-(n+1)}, y_n + 2^{-(n+1)}]$ niet in een eindige vereniging van de U_i bevat is. Vanwege

$$|y_{n+k} - y_n| \;\leq\; \sum_{l=1}^{k} |y_{n+l} - y_{n+l-1}| \;=\; \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^{n+l+1}} \;<\; \frac{1}{2^{n+1}}$$

is dit een Cauchy-rij; zij $z \in [0, 1]$ diens limiet en $j \in I$ een index waarvoor $z \in U_j$. Omdat U_j open is bestaat $\varepsilon > 0$ met $B(z; \varepsilon) \subseteq U_j$ en omdat $(y_n)_n$ naar z convergeert bestaat $N \in \mathbb{N}_0$ met $y_n \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ voor alle $n \geq N$. Kies nu $n \geq N$ met $2^{-n} < \varepsilon$. Dan is

$$|x - z| \;\leq\; |x - y_n| + |y_n - z| \;\leq\; \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon$$

voor alle $x \in \overline{B(y_n; 2^{-(n+1)})}$ en dat is absurd, want geen eindig aantal (laat staan een enkele) van de U_i mag $\overline{B(y_n; 2^{-(n+1)})}$ overdekken.

Is nu $(W_\iota)_{\iota\in I}$ een open overdekking van $[a, b]$, dan beschouw het homeomorfisme

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & t & \mapsto & a + t(b-a) \end{array}$$

en de open overdekking $(f^{-1}(W_\iota))_{\iota\in I}$ van $[0, 1]$. Omdat $[0, 1]$ compact is heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking

$$[0, 1] \;\subseteq\; f^{-1}(W_{\iota_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(W_{\iota_n}) \;.$$

Daarmee is

$$[a, b] \;\subseteq\; W_{\iota_1} \cup \ldots \cup W_{\iota_n}$$

een eindige deeloverdekking van $[a, b]$. $\square$