# Tentamen Inleiding Analyse, deel 2

## 3 juli 2008, 14:00 – 17:00 uur

- Gebruik voor elk van de vier opgaven svp **een apart blad** en voorzie dat van **je naam** en **studentnummer** (dit ivm verdeling van nakijkwerk).
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vier opgaven tellen even zwaar.

**Succes!**

**Opgave 1**. Definieer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2).$$

(a) Bepaal alle stationaire punten van $f$ (terzijde: men spreekt ook vaak over "kritieke punten").

(b) Zij

$$D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Neemt $f$ op $D$ een maximum en een minimum aan? Zo ja, in welke punten?

(c) Wat is het beeld van $D$ onder $f$?

(d) We bekijken nu weer $f$ als gedefinieerd op $\mathbb{R}^2$. Een zadelpunt is een stationair punt dat noch een lokaal maximum noch een lokaal minimum is. Heeft $f$ zadelpunten? Zo ja, waar?

**Opgave 2**. Zij $I := [a, b]$ voor zekere reële getallen $a, b$ met $b > a$. Zij $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en veronderstel dat $f'$ begrensd is op $I$. We roepen in herinnering dat de variatie van $f$ over een interval $J$, met $J \subset I$, is gedefinieerd door

$$\operatorname*{var}_J f := \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in J\}$$

en dat we met $\ell(J)$ de lengte van $J$ aanduiden. In het volgende is $V$ steeds een verdeling van $I$ met maas (wijdte) $m(V)$, is $\underline{S}(f, V)$ de ondersom van $f$ bij de verdeling $V$ en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom, en is $\Xi$ een rij strooipunten bij $V$.

(a) Toon aan dat een constante $M > 0$ bestaat zó dat

$$\operatorname*{var}_J f \leq M\, \ell(J)$$

voor ieder interval $J \subset I$.

**Zie ommezijde!**

(b) Toon aan dat voor iedere verdeling $V$ van $I$ geldt

$$\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) \leq M\,\ell(I)\,m(V)$$

waarbij $M$ de constante uit (a) is.

(c) Toon aan dat een constante $K > 0$ bestaat zó dat voor iedere keuze van $V$ en $\Xi$ geldt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,V,\Xi) \right| \leq K\,m(V).$$

Hierbij is $S(f,V,\Xi)$ de Riemann-som van $f$ voor $V$ en $\Xi$.

**Opgave 3**. Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vier keer differentieerbaar en veronderstel dat $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$.

(a) Bewijs dat een interval $I$ bestaat zó dat 0 een inwendig punt van $I$ is en bovendien voor $x \in I$ geldt dat

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\quad \text{voor } x > 0, \\ f''(x) < 0 &\quad \text{voor } x < 0. \end{aligned}$$

(b) Toon aan dat voor $x \in I$ en $x \neq 0$ geldt $f'(x) > 0$.

(c) Toon aan dat de restrictie van $f$ tot $I$ monotoon strikt stijgend is.

(d) Zij $g$ de inverse van de restrictie van $f$ tot $I$. Bewijs dat $g$ *niet* differentieerbaar is in $y = 0$.

(e) Bekijk nu het speciale geval $f(x) = x^3(1 + x^3)$. Leidt een expliciete uitdrukking voor de inverse $g(y)$ af.

**Opgave 4**. Zij $(V,d)$ een metrische ruimte. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $V$. Zij $a \in V$.

(a) Stel dat de uitspraak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

*niet* waar is. Toon aan dat $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat

$$d(a_n, a) \geq \varepsilon$$

voor *oneindig veel* indices $n$.

(b) Zij nu $D$ een rij-compacte deelverzameling van $V$ en veronderstel dat $a \in D$ en ook $a_n \in D$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de eigenschap heeft dat *iedere* convergente deelrij limiet $a$ heeft. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(c) Definieer een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ zó dat *iedere* convergente deelrij limiet 1 heeft, terwijl de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niet* convergeert.

**Einde.**