Introductiecursus (wiskunde)

Heinz Hanßmann

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

2005–2006

Abstract

Meer details zijn te vinden in het boek *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, van *Edwin Kreyszig*, Wiley (1999) en voor het integreren in het diktaat *Primitiveren* van *Pierre van Mouche*.

1 Inleiding

- Doel : voldoende wiskunde om met de (master) studie verder te kunnen, i.h.b. voor de 'volgende' cursus *Molecular modelling & wiskunde*.
- In de bachelor–studie scheikunde beslaan *Wiskunde 1 & 2* drie periodes, perssen dit nu in één periode $\longrightarrow$ bij onvolledige voorkennis overwerk.

In *Quantum Chemie* : De tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \;+\; V(x)\cdot\Psi \;.$$

De complete wiskundige aspekten hiervan zijn te moeilijk voor deze cursus, maar we willen wél de ingrediëntien van de vergelijking begrijpen. Sommige van de nodige techniken zullen we in een vereenvoudigde situatie leren kennen.

2 Complexe getallen

Reële getallen $\mathbb{R}$: rechte lijn, willen uitbreiden naar vlak $\mathbb{C}$ met coördinaten $(x, y) \in \mathbb{C}$, dus $x \in \mathbb{R}$ en ook $y \in \mathbb{R}$, de vertikale coördinaat.

$$\text{Optellen} \qquad (x, y) \;+\; (u, v) \;=\; (x + u, y + v) \;.$$

Maar hoe vermenigvuldigen ?

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (u, v) &= [x(1,0) + y(0,1)] \cdot [u(1,0) + v(0,1)] \\ &= xu(1,0)\cdot(1,0) \;+\; xv(1,0)\cdot(0,1) \;+\; yu(0,1)\cdot(1,0) \;+\; yv(0,1)\cdot(0,1) \\ &= xu(1,0) \;+\; xv(0,1) \;+\; yu(0,1) \;-\; yv(1,0) \\ &= (xu - yv, xv + yu)\end{aligned}$$

want we willen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ook t.o.v. vermenigvuldigen, dus

$$(x, 0) \cdot (u, 0) \stackrel{!}{=} (xu, 0) ,$$

ofwel

$$(1, 0) \cdot (1, 0) \stackrel{!}{=} (1, 0) ,$$

verder

$$(1, 0) \cdot (0, 1) \stackrel{!}{=} (0, 1) \cdot (1, 0) \stackrel{!}{=} (0, 1) ;$$

dan kunnen we $(1, 0)$ met '1' afkorten, en bovendien

$$(x, 0) = x(1, 0) = x1 = x$$

schrijven. Nu blijft alleen nog $(0, 1) \cdot (0, 1)$ over. Definiëren

$$(0, 1) \cdot (0, 1) := -(1, 0) = -1$$

en ook

$$\mathrm{i} := (0, 1) ,$$

dan is dus $\mathrm{i}^2 = -1$ ofwel $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Optellen en vermenigvuldigen komt dus neer op

$$\begin{aligned} [x + \mathrm{i}y] + [u + \mathrm{i}v] &= x + u + \mathrm{i}(y + v) \\ [x + \mathrm{i}y] \cdot [u + \mathrm{i}v] &= xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu) . \end{aligned}$$

Opgave 1 op p.701 ... (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, maar hoe delen) :

$$\frac{22 + 7\mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}} = \frac{(22 + 7\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})}{(3 - 2\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})} = \ldots = 4 + 5\mathrm{i} .$$

Dit trucje werkt altijd, als $z = x + \mathrm{i}y$ de noemer is, dan worden teller en noemer allebei met het complex geconjugeerde

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

vermenigvuldigd, en in de noemer komt zo het reële getal

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

te staan. Als we uit dit positief reëel getal de wortel trecken verkrijgen we de absolute waarde (of 'lengte')

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Bovendien noemt men voor $z = x + \mathrm{i}y$ de 'horizontale' coördinaat $x = \mathrm{Re}\, z$ het reële gedeelte en $y = \mathrm{Im}\, z$ het imaginair gedeelte. Hiermee nu p.657, opg.12.1.3–12, opg.12.1.13–17 en opg.12.1.18–20.

2.1 Meetkundige interpretatie

De volgende lineaire afbeeldingen 'draaien en rekken':

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad .$$

De formule in

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

is juist de formule voor de complexe vermenigvuldiging. We hebben nu drie equivalente representaties voor complexe getallen :

$$(x, y) \;\hat{=}\; x + \mathrm{i}y \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad .$$

Wat betekenen de complexe conjugatie $\bar{z}$ en $z \cdot \bar{z}$ voor zulke matrices ? Deze representatie verduidelijkt de meetkundige betekenis van complex vermenigvuldigen (draaien en rekken). Nu p.657, opg.12.1.1+2.

2.2 Poolcoördinaten

Bereken $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ voor $z = \mathrm{i}y$.

$$|\exp \mathrm{i}y\,|^2 = \exp(\mathrm{i}y)\exp(\overline{\mathrm{i}y}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y - \mathrm{i}y} = 1 \ .$$

Blijf dus op de circel met straal 1 , dus $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}) = \cos y$ en $\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}) = \sin y$. Dit levert de formule van Euler op :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$$

en i.h.b. $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ en $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} + 1 = 0$. Voor 'algemene' complexe getallen $z = x + \mathrm{i}y$ is

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x + \mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \ .$$

In de reële richting groeit de functie exponentiëel, en in de imaginaire richting is er oscillatie en periodiciteit :

$$\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp z \ .$$

Hiermee p.682, opg.12.6.1–5 en opg.12.6.11–15.

Poolcoördinaten : i.p.v. cartesische coördinaten meet lengte en hoek :

$$z = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \ .$$

Dit werkt <u>niet</u> voor $z = 0$. (Herinnering : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y \ + \ \mathrm{i}\sin y)$ en $\mathrm{e}^x \neq 0$, dus ook $\mathrm{e}^z \neq 0$.) Hiermee is

$$z \cdot \bar{z} \;=\; r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \cdot r\,(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \;=\; r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

en dus

$$r \;=\; +\sqrt{z\bar{z}} \;=\; |z| \ .$$

Het argument $\theta = \arg z$ verkrijgen we d.m.v.

$$\cos\theta \;=\; \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} \ , \qquad \sin\theta \;=\; \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} \ .$$

Dit bepaalt $\arg z$ op veelvouden van 2π na, en we definiëren de *hoofdwaarde* d.m.v. de beperking $-\pi < \arg z \leq +\pi$. Voor waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ kunnen we ook met

$$\tan\theta \;=\; \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;=\; \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$$

werken, maar als het argument in het linker half–vlak ligt moeten we hiermee rekening houden en π optellen/aftrekken. Vermenigvuldigen van complexe getallen in poolcoördinaten is

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \;=\; r_1 r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \ ,$$

we vermenigvuldigen dus de absoluutwaarden en tellen de argumenten bij elkaar op. Ofwel : de straal $r_2 = |z_2|$ wordt om r_1 gerekt en het argument $\theta_2 = \arg z_2$ wordt om θ_1 (verder) gedraait. I.h.b. is $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg z}$, en we hebben

$$z^n \;=\; r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \;=\; r^n\left(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right) \ ,$$

dus bv. ('complex is alles eenvoudiger')

$$\cos(2\theta) \;=\; \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2\right) \;=\; \cos^2\theta \;-\; \sin^2\theta \ .$$

Hiermee p.662, opg.12.2.1–19 en p.682, opg.12.6.6–10.

2.3 Complexe polynomen

Op die manier kunnen we ook (complexe) wortels trekken :

$$z^n \;=\; w \;=\; R(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \quad\Rightarrow\quad z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

met

$$r \;=\; \sqrt[n]{R} \quad \text{(reële wortel)} \quad \text{en} \quad \theta \;=\; \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Voorbeeld (p.662, opg.12.2.21) : wat is de 3de wortel van $w = 1+\mathrm{i}$? Weten van opg.12.2.1 de poolcoördinaten $R = |w| = \sqrt{2}$ en $\varphi = \arg z = \frac{1}{4}\pi$. De poolcoördinaten van $z = \sqrt[3]{w}$ zijn dus

$$r \;=\; \sqrt[3]{\sqrt{2}} \;=\; \sqrt[6]{2} \quad \text{en} \quad \theta \;=\; \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \;=\; \frac{1}{12}\pi \;+\; \frac{2k}{3}\pi$$

waar $k \in \mathbb{Z}$ dusdanig dat $-\pi < \theta \leq \pi$. Dus even proberen :

$$\begin{aligned}
k = 0: \quad \theta &= \frac{1}{12}\pi \\
k = 1: \quad \theta &= \frac{1}{12}\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{9}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi \\
k = 2: \quad \theta &= \frac{1}{12}\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{17}{12}\pi > \pi \\
k = -1: \quad \theta &= \frac{1}{12}\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7}{12}\pi > -\pi \\
k = -2: \quad \theta &= \frac{1}{12}\pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{15}{12}\pi \leq -\pi \ .
\end{aligned}$$

Op die manier vinden we drie oplossingen (die dan worden herhaald) en deze vormen in het complexe vlak een gelijkzijdig driehoek. We zien dat de polynoomvergelijking $z^3 - 1 - \mathrm{i} = 0$ drie oplossingen heeft, en net zo heeft $z^n - w = 0$ voor willekeurige complexe $w \neq 0$ natuurlijk n oplossingen. De vergelijking $z^n = 0$ heeft de oplossing $z = 0$, maar hier spreken we van een $n$voudige oplossing, met *multipliciteit* n . Iets algemener : als we een complex polynoom

$$p(z) = z^n + w_1 z^{n-1} + \ldots + w_{n-1} z + w_n$$

gelijk aan 0 stellen, $p(z) = 0$, dan bestaan er altijd n oplossingen (met meervouden). Als $a_1, \ldots, a_n$ deze oplossingen zijn, dan kunnen we het polynoom schrijven als

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} z - a_i = (z - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot \ldots \cdot (z - a_n)$$

met $w_1 = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n$ en $w_n = \pm a_1 a_2 \cdots a_n$. Dit heeft ook gevolgen voor reële polynomen

$$p(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$$

waar de coëfficienten dus allemaal reëel zijn. Indien de (complexe) oplossingen $a_1, a_2, \ldots a_n$ toevallig reëel zijn is er niets aan de hand. Als $p(a) = 0$ met $a \notin \mathbb{R}$ dan is ook

$$p(\bar{a}) = \bar{a}^n + c_1 \bar{a}^{n-1} + \ldots + c_n = \overline{p(a)} = 0$$

en we kunnen de twee factoren

$$(x - a) \cdot (x - \bar{a}) = x^2 - (\mathrm{Re}\, a)x + (\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 =: q(x)$$

als een kwadratisch polynoom met <u>reële</u> coëfficienten schrijven. Voor het hele polynoom p verkrijgen we zo de opsplitsing

$$p(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - a_i) \cdot \prod_{j=1}^{k} q_j(x) \tag{1}$$

met $n = m+2k$. Inleveropgave : p.662, opg.12.2.20, nu nog opg.12.2.22–32 en opg.12.2.36.

3 Integreren

Het volgende 'onbekende onderwerp' in de Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \;+\; V(x)\cdot\Psi$$

is dat het om een vergelijking gaat waar de afgeleide van de functie in voorkomt. Het eenvoudigste type van dit soort vergelijkingen is

$$\dot{y} \;=\; f(t)$$

en hiervoor kunnen we meteen de oplossing opschrijven. Immers, de hoofdstelling van de integraalrekening zegt

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad F'(x) \;=\; f(x) \;.$$

Integreren komt dus neer op het zoeken van een functie diens afgeleide de integrand is, men spreekt ook van een primitieve — en dus van primitiveren. Notatie :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(x)+c \tag{2}$$

(want de afgeleide van de constante is 0 , dus die kan er altijd bij). Integratie is lineair, we mogen reële getallen naar voren halen en sommen uit elkaar schrijven :

$$\int \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lambda\int f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mu\int g(t)\,\mathrm{d}t \;.$$

Voorbeeld :

$$\int 5\mathrm{e}^t + 4\sin t\,\mathrm{d}t \;=\; 5\mathrm{e}^t \;-\; 4\cos t \;+\; c \;.$$

Een eenvoudig trucje is ook de 'kijkmethode':

$$\int f(\lambda t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{F(\lambda t)}{\lambda} \;+\; c$$

waar F door (2) gegeven (want $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\lambda t) = \lambda F'(\lambda t)$).

Hiermee $\int t^5 - 6t + 3\,\mathrm{d}t$ en p.96(dictaat, =p.8), opg.1.a–d,k–p.

Voor een beknopt overzicht over de hyperbolische functies $\sinh t$ en $\cosh t$ zie p.A53(Kreyszig); de inverse functies noemt men $\operatorname{arsinh} t$ en $\operatorname{arcosh} t$, de area–functies.

3.1 Partiële integratie

Ga uit van de afgeleide van een product : $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Wil $\int uv\,\mathrm{d}t$ berekenen, stel hiervoor

$$u \;=\; f' \quad \text{en} \quad v \;=\; g \;,$$

dan is $\int uv\,\mathrm{d}t = \int f'g\,\mathrm{d}t$ en

$$\int f'g\,\mathrm{d}t \;=\; \int (fg)' - fg'\,\mathrm{d}t \;=\; \int (fg)'\,\mathrm{d}t \;-\; \int fg'\,\mathrm{d}t \;=\; fg \;-\; \int fg'\,\mathrm{d}t \;.$$

We moeten dus twee keer het integraal $f = \int u\,\mathrm{d}t$ neerzetten en dan bovendien nog een product integreren, en de enige vereenvoudiging is dat de tweede factor in dat product dan de afgeleide van de 'oorspronkelijke tweede factor' is. De keuze 'wat is f' en wat is g' geschiedt dus voornamelijk met het oog op dit laatste integraal.

Typisch voorbeeld :

$$\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t \;=\; \ldots \;=\; \frac{t - \sin t \cos t}{2} \;+\; c \;.$$

Hiermee p.97(=p.9), opg.2.b,c,a,d,e.

3.2 Substitutieregel

Ga uit van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. We zien meteen

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(g(x)) \;+\; c$$

(een speciaal geval hiervan is $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln(g(x)) + c$). Hoe gebruiken we dit om $\int h(g(x))\,\mathrm{d}x$ aan te gaan ? Direct werken met $y = g(x)$, dus $\mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$, leidt tot

$$\int h(g(x))\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{h(y)}{g'(x)}\,\mathrm{d}y \;=\; \int \frac{h(y)}{g'(g^{-1}(y))}\,\mathrm{d}y$$

en dat is niet noodzakelijk eenvoudiger (soms wel!).

Voorbeeld $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. A). $y = x^2$, dus $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ en dan

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \sqrt{1+y}\,\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} \;.$$

B). Herinner $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ en stel $x = \sinh t$, dus $\mathrm{d}x = \cosh t \mathrm{d}t$ en dan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\cosh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \sinh t\cosh t - \int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \sinh t\cosh t - \int \cosh^2 t - 1\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

waarmee uiteindelijk

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t &= \frac{\sinh t\cosh t}{2} + \frac{t}{2} + c \\ &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} x + c\ .\end{aligned}$$

Hiermee p.97(=p.9), opg.2.f–i, inleveropgave is p.97(=p.9), opg.3.

3.3 Breuksplitsing

Hoe bereken je $\int \frac{\mathrm{d}x}{p(x)}$ waar $p \in \mathbb{R}[x]$ een polynoom ? D.w.z.

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0\ ,$$

bv. $p(x) = x^2 - 1$. Stel p heeft n verschillende reële wortels a_i , dus

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} x - a_i = (x - a_1)\cdot\ldots\cdot(x - a_n)\ .$$

Dan kunnen we

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x - a_i} = \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x - a_n}$$

schrijven met nog nader te bepalen coëfficienten α_i . Hiermee kunnen we direct primitiveren, bv.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \alpha_1\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \alpha_2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \alpha_1 \ln|x-1| + \alpha_2\ln|x+1| + c$$

en nu zijn we ook gemotiveerd om de coëfficienten α_1 en α_2 te berekenen. Hiervoor kunnen we gewoon getallen voor x in de (oneindig veel) vergelijking(en)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x+1} \tag{3}$$

invoeren. Het gemakkelijkst zou dit met $x = \pm 1$ werken, maar door nul delen mag niet, dus vermenigvuldigen we (3) met $x - 1$ en/of met $x + 1$. Dit resulteert in

$$\frac{1}{1+1} = \alpha_1 + \alpha_2\cdot 0 \quad \text{en} \quad \frac{1}{-1-1} = \alpha_2$$

en dus

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\ln|x-1| \;-\; \frac{1}{2}\ln|x+1| \;+\; c$$

Tegenvoorbeeld :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \;=\; \arctan x \;+\; c$$

want x^2+1 heeft geen reële wortels. In onderdeel 2.3 hadden we gezien dat we een reëel polynoom $p \in \mathbb{R}[x]$ *altijd* zoals in (1) kunnen schrijven als product van lineaire en quadratische factoren. Voorbeeld :

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} &= \alpha_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \;+\; \alpha_2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \;+\; \int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| \;-\; \frac{1}{4}\ln|x+1| \;-\; \frac{1}{2}\arctan x \;+\; c\ . \end{aligned}$$

De theorie houdt hier (helaas) nog lang niet op, verdere complicaties zijn mogelijk.

- Het quadratisch deel is algemener $q(x) = x^2+ax+b$. Dan substituëren we om toch op de arcus tangens te komen.
- De coëfficient β in de teller van zo'n integraal met quadratische noemer is niet nul. Dan splitsen we verder op

  $$\frac{\beta x+\gamma}{q(x)} \;=\; \frac{\beta}{2}\frac{q'(x)}{q(x)} \;+\; \frac{\delta}{q(x)}$$

  met een nog te bepalen coëfficient δ , waarna we de eerste term tot $\frac{\beta}{2}\ln|q(x)|+c$ primitiveren en de tweede term met behulp van de arcus tangens kunnen integreren.
- Indien er meervoudige (reële) wortels zijn, kunnen we het integraal m.b.v. 'meervoudige breuken' aangaan, voor meer details zie het dictaat.
- Dit gaat 'net zo' als er meervoudige quadratische gedeeltes zijn (en die hebben natuurlijk te maken met meervoudige complexe wortels).

Belangrijk is te onthouden : rationale functies, dus breuken van polynomen, kunnen we altijd primitiveren. Als je er echt een 'in real life' tegenkomt, dan ben je waarschijnlijk ook voldoende gemotiveerd om je ook door boven aangeduidde theorie doorheen te werken. En wie weet, misschien heb je geluk en de wortels zijn van elkaar verschillend en reëel, dus dan gaat het net zo gemakkelijk als in het eerste voorbeeld.

We slaan de opgaven 2.j t/m 2.m dan ook maar over. Welke van opg.4 op p.97(=9) kun je wel aan ?

4 Gewone differentiaalvergelijkingen

In de Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \;+\; V(x)\cdot\Psi$$

staat de gezochte functie niet alleen aan de linker, maar ook aan de rechter kant. I.h.a. noemt men

$$\dot{y} \;=\; f(t,y)$$

een explicite eerste orde differentiaalvergelijking. In de vorige sectie hebben we het 'eenvoudigst geval' behandelt dat f niet van y afhangt, maar pas als y ook aan de rechter kant staat spreekt men echt van een differentiaalvergelijking. Indien f niet expliciet tijdsafhankelijk is noemt men de differentiaalvergelijking autonoom, voor de gezochte functie $y(t)$ moet dan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \;=\; f(y(t))$$

gelden. Er zijn algemene stellingen zoals

$$f \text{ continu} \quad\Rightarrow\quad \text{oplossing } y(t) \text{ bestaat}$$

en

$$f \text{ continu differentiëerbaar} \quad\Rightarrow\quad \text{oplossing } y(t) \text{ (ook) eenduidig}$$

(*niet* ons doel : f zo gek mogelijk). Neem dus bv. $f(y) = y^2 - 1$. Dit beschrijft de stijging van (de oplossing) $y(t)$, want $\dot{y}$ is tenslotte gelijk aan $f(y)$. Om een oplossing te bepalen hebben we een beginwaarde $y(0) = y_0$ nodig, de differentiaalvergelijking bepaalt dan 'hoe het verder gaat'.

Indien $f(y_0) = 0$ is, verandert er niets meer (want $\dot{y} = 0$) en we vinden $y(t) = y_0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. In zo'n evenwichtspunt is de oplossing dus voor alle tijden gedefinieerd, dat hoeft niet voor elke oplossing zo te zijn (de boven aangeduidde algemene stelling levert alleen maar het bestaan van een oplossing voor kleine tijden op).

We kunnen ook andere oplossingen expliciet berekenen. Stel dus $f(y_0) \neq 0$, en vanwege de eenduidigheid zal dan ook $f(y(t)) \neq 0$ voor alle tijden t waarvoor de oplossing $y(t)$ met $y(0) = y_0$ bestaat. Daarom mogen we door y delen

$$\frac{\dot{y}}{f(y)} \;=\; 1$$

en komen uit op

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} \;=\; \int_0^t \mathrm{d}t \;=\; t$$

en in het voorbeeld $f(y) = y^2 - 1$ dus

$$t \;=\; \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\ln|y-1| \;-\; \frac{1}{2}\ln|y+1|\Big|_{y_0}^{y(t)} \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{|y(t)-1|\;|y_0+1|}{|y(t)+1|\;|y_0-1|}$$

en daarmee

$$\left|\frac{y(t)-1}{y(t)+1}\right| \;=\; \left|\frac{y_0-1}{y_0+1}\right|\cdot \mathrm{e}^{2t} \;.$$

T.o.v. de absoluutwaarden zijn er drie mogelijkheden maar in ieder van die gevallen mogen we ze gewoon weglaten en kunnen verder doorrekenen tot

$$y(t) \;=\; \frac{y_0\,+\,1\,+\,(y_0-1)\mathrm{e}^{2t}}{y_0\,+\,1\,-\,(y_0-1)\mathrm{e}^{2t}} \;.$$

Hiermee $f(y)=y$, $f(y)=\sqrt{1-y^2}$, $f(y)=c\cdot y$, p.18, opg.1.3.3, $f(y)=\mathrm{e}^y$, p.18, opg1.3.6, $f(y)=\tan y$ en p.18, opg.1.3.11. Inleveropgave is $\dot{y}=y^4-1$.

De derde opgave kunnen we meteen voor de Schrödingervergelijking toepassen. In quantum chemie leidt de ansatz

$$\Psi(q,t) \;=\; \psi(q)\Phi(t)$$

tot

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Phi} \;=\; E\Phi \tag{4}$$

waar E een eigenwaarde van de (tijdsonafhanklijke) Schrödingeroperator is. De oplossing van (4) is

$$\begin{aligned}\Phi(t) \;&=\; \Phi_0\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t}\\ &=\; \mathrm{Re}\,(\Phi_0)\cos(\frac{E}{\hbar}t)\,+\,\mathrm{Im}\,(\Phi_0)\sin(\frac{E}{\hbar}t)\,+\,\mathrm{i}\left[\mathrm{Im}\,(\Phi_0)\cos(\frac{E}{\hbar}t)\,-\,\mathrm{Re}\,(\Phi_0)\sin(\frac{E}{\hbar}t)\right]\end{aligned}$$

en laat zien hoe reëel en imaginair gedeelte van de golffunctie Φ oscilleren.

4.1 Tijdsafhankelijke differentiaalvergelijkingen

Schrijf $\dot{y}=f(t,y)$ als systeem

$$\begin{aligned}\dot{x} \;&=\; 1\\ \dot{y} \;&=\; f(x,y)\end{aligned}$$

van twee autonome differentiaalvergelijkingen. Door $x_0=0$ te kiezen komen we via de oplossing $x(t)=t$ van de eerste vergelijking gemakkelijk terug. De rechter kant

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y)\end{pmatrix}$$

is voor ieder $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (als $f(x,y)$ maar bestaat) een vector — als we deze bij (x,y) laten beginnen verkrijgen we een vectorveld. Voor $f(x,y)=x\cdot y$ zie bv. figuur 5a op p.11 in het boek. Een oplossing is dan een kromme

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \quad\text{met}\quad \begin{pmatrix} x(0)\\ y(0)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

die in elk punt tangentiaal aan de bijbehorende vector is (en waar de lengte van zo'n raakvektor nog de snelheid weergeeft ook). Voor $x_0 \neq 0$ zal dan wel $x(t) = x_0 + t \neq t$ moeten zijn, en natuurlijk willen we door *elk* punt van het vlak een oplossing kunnen bepalen. Als we toch $x(t) = t$ willen houden (dus eigenlijk geen verschil tussen t en x willen maken) zullen we met meer algemene beginwaarden

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

moeten werken (en dan natuurlijk $x_0 = t_0$ kiezen). Voor $y_0 = 0$ is blijkbaar $y(t) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Voor $y_0 \neq 0$ is (zie plaatje) ook $y(t) \neq 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Na $\dot{x} = 1$ moeten we nu nog

$$\dot{y} = x \cdot y$$

oplossen :

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{x_0}^{x(t)} x \,\mathrm{d}x \quad \ldots$$

$$\ldots \ln|y(t)| = \ln|y_0| + \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) \ldots$$

$$\ldots y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} .$$

Dit trucje werkt altijd als

$$f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$$

is, zo'n niet–autonome differentiaalvergelijking heet *separabel*. Want dan werk je (buiten de evenwichtspunten $y(t) \equiv y_0$ waar $h(y_0) = 0$ is) met

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(x) \,\mathrm{d}x .$$

De beginwaarde is voor niet–autonome differentiaalvergelijkingen zoals gezien iets algemener $y(t_0) = y_0$. Hiermee $\dot{y} = y \cdot \cos t$ en p.18, opg.1.3.2,4,5,7,12–19.

4.2 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Een speciaal geval van een separabele differentiaalvergelijking is de (homogene) lineaire differentiaalvergelijking

$$\dot{y} = f(t) \cdot y \tag{5}$$

waarvoor we met bovenstaande methode de oplossing

$$y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} f(\tau) \,\mathrm{d}\tau}$$

vinden. De inhomogene lineaire differentiaalvergelijking

$$\dot{y} = f(t) \cdot y + g(t)$$

is een niet–separabele differentiaalvergelijking die we toch aankunnen. Eerst bepalen we een oplossing $y_h(t) = \mathrm{e}^{F(t)}$ (waar $F'(t) = f(t)$) van het homogeen gedeelte (5) en maken dan de ansatz ('variatie van de constante')

$$y(t) \;=\; c(t) \cdot y_h(t) \ .$$

Dit leidt tot de vergelijking

$$\dot{c}(t) \cdot y_h(t) \,+\, c(t) \cdot \dot{y}_h(t) \;=\; f(t) \cdot c(t) \cdot y_h(t) \,+\, g(t)$$

en via

$$\dot{c}(t) \;=\; \frac{g(t)}{y_h(t)} \;=\; g(t) \cdot \mathrm{e}^{-F(t)}$$

tot de particuliere oplossing

$$y_p(t) \;=\; \mathrm{e}^{F(t)} \cdot \int g(t) \cdot \mathrm{e}^{-F(t)} \, \mathrm{d}t \ ;$$

en de algemene oplossing is

$$y(t) \;=\; y_p(t) \,+\, c \cdot y_h(t)$$

waar $c \in \mathbb{R}$ een willekeurig constant is. Daarmee hebben we het oplossen van een (niet–homogene) lineaire differentiaalvergelijking teruggebracht tot het berekenen van twee integralen. Hiermee p.38/9 opg.1.6.3–22. Inleveropgaven zijn p.39, opg.1.6.23–27.

4.3 Substitutie

Net als integralen kunnen ook differentiaalvergelijkingen worden vereenvoudigd d.m.v. een geschikte substitutie. Hierover alleen maar een voorbeeld. Men noemt

$$\dot{y} \;=\; t^3 y \,+\, 3t^3 \sqrt[3]{y}$$

een Bernoulli–differentiaalvergelijking en voor dit type is bekend met welke substitutie men moet werken. Definieer $z := y^{\frac{2}{3}}$, dan is

$$\begin{aligned} \dot{z} \;&=\; \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} \dot{y} \;=\; \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}} t^3 \,+\, 2t^3 \\ &=\; \frac{2}{3} t^3 z \,+\, 2t^3 \end{aligned}$$

en deze lineaire differentiaalvergelijking heeft de algemene oplossing

$$z(t) \;=\; c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}t^4} \,-\, 3 \ .$$

Omdat $z = y^{\frac{2}{3}} \geq 0$ gelden deze oplossingen alleen voor tijden t waar $z(t) \geq 0$ en onder deze beperking is dan

$$y(t) \;=\; \pm \left(c\mathrm{e}^{\frac{1}{6}t^4} - 3 \right)^{\frac{3}{2}} \ .$$

Deze oplossingen kunnen we nog samenvoegen met de oplossing(!) $y(t) \equiv 0$ en dan hebben we bv. als oplossing behorende bij de beginwaarde $y(-1) = 0$

$$y(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t < 0 \\ -(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}t^4} - 3)^{\frac{3}{2}} & \phantom{\text{voor}} \quad t \geq 0 \end{cases} \quad .$$

Hier is dus niet meer sprake van eenduidigheid, de reden is dat $f(t, y) = t^3 y + 3t^3 \sqrt[3]{y}$ niet in $y = 0$ differentieerbaar is. Inleveropgave p.60, opg.47.

5 Vectorrekening

Één voorbeeld kennen we al : $\mathbb{C}$ is een reële vectorruimte : kan ze bij elkaar optellen en met reële getallen vermenigvuldigen (dat we ze ook met elkaar kunnen vermenigvuldigen is speciaal aan $\mathbb{C}$ en doet hier even niet terzake). Andere voorbeelden : $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$, i.h.b. $\mathbb{R}$ zelf ook ($\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$), $n \times m$ matrices — dit even checken : $+\surd$, $\cdot\surd$ t.o.v. eigenschappen p.359 ($\triangleq$ p.309 (4) & (5)) — polynomen $\mathbb{R}[x]$, continue functies $C(\mathbb{R})$, differentieerbare functies, functies f waarvoor f^2 integreerbaar is, ...

De oplossingen van een (homogene) lineaire differentiaalvergelijking $\dot{y} = f(t) \cdot y$ (dit was deel van het huiswerk). Hiermee opg.6.8.1–10 op p.364 (alleen 'is dit een vectorruimte?'). De oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking

$$\widehat{H}\psi(q) \quad = \quad E \cdot \psi(q) \quad , \qquad \text{waar} \quad \widehat{H} \quad = \quad -\sum_{j=1}^{n} \frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla_j^2 \; + \; V \quad .$$

vormen eveneens een vectorruimte.

5.1 Basis van een vectorruimte

Hierboven in feite gebruikte stelling : een deelruimte van een vectorruimte is een deelverzameling die 'gesloten' is onder optellen en (met reële getallen) vermenigvuldigen. De kleinste deelruimte U die een gegeven verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bevat bestaat uit alle vectoren die we (op een of ander manier) als lineaire combinatie $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ kunnen schrijven en we zeggen dat U wordt voortgebracht door $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Indien dit 'zo zuinig mogelijk' gebeurt, er dus geen 'overbodige' vectoren in $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bevat zijn, dan noemen we $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineair onafhankelijk. Dan kan elke vector in U op precies één manier als lineaire combinaties van de $v_1, \ldots, v_n$ worden geschreven. Dit is dan en slechts dan het geval als de nulvector op precies één manier als lineaire combinaties van de $v_1, \ldots, v_n$ kan worden geschreven, dus als

$$\lambda_1 v_1 \; + \; \ldots \; + \; \lambda_n v_n \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad .$$

Voor een verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$ van vectoren uit een vectorruimte V zijn de volgende eigenschappen equivalent.

- V wordt door $\{v_1, \ldots, v_n\}$ voortgebracht (dus $U = V$) en $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is minimaal met deze eigenschap (dus als we een van de vectoren uit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ verwijderen dan brengen de resterende vectoren niet meer de hele ruimte V voort).

- $\{v_1,\ldots,v_n\}$ is lineair onafhankelijk en maximaal met deze eigenschap (dus als we een vector $u \in V$ toevoegen dan is $\{v_1,\ldots,v_n,u\}$ niet (meer) lineair onafhankelijk).
- V wordt door $\{v_1,\ldots,v_n\}$ voortgebracht en deze verzameling is lineair onafhankelijk.
- Ieder vector uit V kan op precies één manier als lineaire combinaties van de $v_1,\ldots,v_n$ worden geschreven.

Als $\{v_1,\ldots,v_n\}$ een van (en dus alle) deze eigenschappen heeft dan noemen we deze verzameling een basis van V . We zeggen dan dat V de dimensie n heeft en schrijven $n = \dim V$. Hiermee opg.6.4.1–8 op p.336 (ook : 'brengen deze vectoren de hele ruimte voort?' en dus 'is dit een basis?').

5.2 Het inproduct

De verzamelingen

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

zijn allebij een basis van $\mathbb{R}^3$, ontbind

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} .$$

Er is dus niet sprake van 'de' component van $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, deze hangt ook af van de andere basisvectoren. Maar er is een manier om toch van 'de' component te mogen spreken : het inproduct.

$$\text{Op } \mathbb{R}^n : \quad \langle a \mid b\rangle = a^{\mathrm{T}}b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Belangrijke eigenschappen : p.361 I,II,III ($\Rightarrow$ Def. (2) $\Rightarrow$ (3)–(5)). Hiermee : p.365, opg.6.8.13–21.

Voorbeeld uit de quantum–mechanica. De veelvouden van golffuncties vormen een *complexe* vectorruimte, met inproduct

$$\langle \Psi \mid \Phi\rangle = \int \Psi^* \Phi \mathrm{d}\tau .$$

De Schrödingeroperator $\widehat{H}$ is Hermite's, d.w.z.

$$\langle \psi \mid H \mid \phi\rangle = \langle \psi \mid \widehat{H}\phi\rangle = \langle \widehat{H}\psi \mid \phi\rangle .$$

Als nu $\widehat{H}\psi = E_1 \cdot \psi$ en $\widehat{H}\phi = E_2 \cdot \phi$ met $E_1 \neq E_2$ zo volgt

$$E_1\langle \psi \mid \phi\rangle = \ldots = E_2\langle \psi \mid \phi\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

en deze twee eigenfuncties staan loodrecht op elkaar (zie ook *Quantum Chemie*).

5.3 Het uitproduct

Dit werkt alleen in $\mathbb{R}^3$!

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 6 - 3\cdot 5\\3\cdot 4 - 1\cdot 6\\1\cdot 5 - 2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Meetkundig : lengte is oppervlakte van opgespand parallelogram (en dus nul als de twee vectoren parallel zijn) en richting is loodrecht erop (orientatie : rechter–hand–regel). Uiteraard

$$\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} \rangle = -3+12-9=0=-12+30-18 = \langle \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} \rangle$$

en we kunnen met de meetkunde ook verder gaan :

$$\| \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \| = \sqrt{14} \ , \quad \| \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \| = \sqrt{77} \ , \quad \| \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} \| = \sqrt{54}$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} = \frac{32}{\sqrt{14\cdot 77}} \Rightarrow \sin\gamma = \ldots \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{14\cdot 77}}$$

(controle : $32^2 + 54 = 1078 = 14 \cdot 77$). Hiermee opg.8.3.1–12 en 8.3.14 op p.421. Let op : het uitproduct is niet zo mooi als de vermenigvuldiging van complexe getallen, want $a \times a = 0$ voor alle vectoren $a \in \mathbb{R}^3$.

6 Lineaire afbeeldingen

Een afbeelding $f : V \longrightarrow V$ op een vectorruimte V heet lineair als

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

voor alle reële getallen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en alle vectoren $a, b \in V$. Voorbeelden : de integratie van continue functies of

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\30\\28\end{pmatrix} .$$

In het tweede voorbeeld staan in de colommen van de matrix de beelden van de basis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Altijd : beelden van een basis leggen een lineaire afbeelding vast — en andersom :

$$f(\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(b_i) .$$

We kunnen dan f door een matrix representeren waarin in elke colom de (coefficienten van) de beelden van de basis $\{b_1, \ldots b_n\}$ staan (ontbonden in deze basis).

Inleveropgave : laat zien dat de afbeelding

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

lineair is en bereken de matrix t.o.v. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Een 'betere' basis bestaat uit eigenvectoren, d.w.z.

$$f(a) \quad = \quad \lambda a$$

bv.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad = \quad 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Hoe berekenen wij andere eigenvectoren ? De determinant van de matrix is nul, dus moet er ook een vector bestaan die op nul wordt afgebeeld — syteem van drie vergelijkingen met drie onbekenden oplossen :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

We zien dat de twee eigenvectoren loodrecht op elkaar staan en dat is geen toeval, de matix is namelijk symmetrisch. De derde eigenvector kan dan ook d.m.v.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gemakkelijk worden berekend en we zien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad = \quad -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .$$

De matrix t.o.v. de basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ is dus

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

en duidelijk eenvoudiger dan waarmee we begonnen zijn.

6.1 Determinant en inverse

Om een eigenvector a te kunnen berekenen hebben we de bijbehorende eigenwaarde λ nodig,

$$0 \neq a \in \ker(\lambda\mathrm{id} - f) \qquad \Rightarrow \qquad \det(\lambda\mathrm{id} - f) \;=\; 0 \;.$$

Voor de algemene definitie van de determinant zie p. 343, beperken ons hier tot de gevallen

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; a\,d \;-\; b\,c$$

van 2×2–matrices en

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;=\; \text{(regel van Sarrus)}$$

van 3×3–matrices. Een determinant $\neq 0$ geeft aan dat de inverse bestaat, en de oplossingen van

$$\det(\lambda\mathrm{id} - f) \;=\; 0$$

zijn juist die waarden van λ waarvoor $\lambda\mathrm{id} - f$ niet inverteerbaar is. In bovenstaand voorbeeld is

$$\det(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}) \;=\; \ldots \;=\; \lambda(\lambda+2)(\lambda-6) \;.$$

Men kan de determinant ook gebruiken om de inverse te berekenen, d.m.v. de regel van Cramer. Voor 2×2 matrices betekent dit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \;.$$

Hiermee opg. 6.6.5–10 op p. 349.

6.2 Diagonaliseren

T.o.v. een basis uit eigenvectoren wordt een lineaire afbeelding door een diagonaalmatrix gegeven. In veruit de meeste gevallen is de lineaire afbeelding in kwestie al door een matrix (t.o.v. de canonieke basis) gegeven en dan betekent dit een transformatie te vinden die de matrix diagonaliseert. Hierover alleen maar een voorbeeld, de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \;.$$

Bereken de eigenwaarden

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \;=\; \lambda(\lambda+1) \,-\, 2 \;=\; \lambda^2 \,+\, \lambda \,-\, 2 \;=\; (\lambda-1)(\lambda+2) \;.$$

Eigenvector voor $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 \;=\; x_2 \;:\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;.$$

Eigenvector voor $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad 2x_1 \;+\; x_2 \;=\; 0 \;:\; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;.$$

De door

$$T \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gedefinieerde lineaire afbeelding transformeert de canonieke basis in een basis bestaande uit eigenvectoren, en

$$T^{-1} \;=\; \frac{1}{2+1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

doet het omgekeerde. Dus

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} T \;=\; \ldots \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;.$$

Hiermee p.375 opg.7.1.3,5,7.

6.3 Toepassing op differentiaalvergelijkingen

Hiermee kunnen we ook hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen aan. Een voorbeeld is

$$\ddot{y} \;=\; 2y \;-\; \dot{y} \;.$$

Terugbrengen naar systeem van 1e orde differentiaalvergelijkingen d.m.v. $x_1 = y$ en $x_2 = \dot{y}$ leidt tot

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \;-\; x_2 \;. \end{aligned}$$

In matrixvorm is dit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x \tag{6}$$

en deze matrix hebben we net gediagonaliseerd. Stel $z = T^{-1}x$, dan is

$$\dot{z} \;=\; T^{-1}\dot{x} \;=\; T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x \;=\; T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Tz \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z \;,$$

d.w.z. $\dot{z}_1 = z_1$ met de algemene oplossing $z_1(t) = z_1^0 \mathrm{e}^t$ en $\dot{z}_2 = -2z_2$ met de algemene oplossing $z_2(t) = z_2^0 \mathrm{e}^{-2t}$. De oplossing van (6) verkrijgen we dan d.m.v $x(t) = Tz(t)$ als

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(t) \;-\; z_2(t) &&= z_1^0 \mathrm{e}^t \;+\; z_2^0 \mathrm{e}^{-2t} \\ x_2(t) &= z_1(t) \;+\; 2z_2(t) &&= z_1^0 \mathrm{e}^t \;-\; z_2^0 \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

en we kunnen nog

$$\begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

gebruiken om de oplossing in termen van de originele beginwaarde te schrijven :

$$y(t) = \frac{2y_0 + \dot{y}_0}{3} \mathrm{e}^t + \frac{y_0 - \dot{y}_0}{3} \mathrm{e}^{-2t} .$$

Uiteindelijk is de oplossing van (6) door

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$$

gegeven, met nog nader te bepalen constanten c_1 en c_2, en hiervoor is het niet nodig om de matrix expliciet te diagonaliseren. Eigenwaarden en eigenvectoren moeten wel bekend zijn, en het bepalen van c_1 en c_2 als functies in de beginwaarden x_1^0 en x_2^0 komt natuurlijk neer op het berekenen van de inverse matrix T^{-1}. Hiermee opg.3.3.1–6 en opg.3.3.10–15 op p.169.

7 Differentiëren

I.h.a. zal een afbeelding $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ niet lineair zijn. Locale lineaire approximatie : in het punt $a \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(a) + (Df(a))(x-a) + o(x-a)$$

waar

$$\frac{o(x-a)}{\|x-a\|} \to 0 \quad \text{als} \quad x \to a .$$

$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ is een lineaire afbeelding. T.o.v. de basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gerepresenteerd door een matrix — wat zijn de coefficienten van deze matrix ? De partiële afgeleiden :

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

(als f continu differentiëerbaar is ook ‘andersom’). Voorbeeld :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x_1 \cos x_2, x_1^2 \sin x_3) \end{array}$$

heeft de afgeleide

$$Df(a) = \left. \begin{pmatrix} \cos a_2 & -a_1 \sin a_2 & 0 \\ 2a_1 \sin a_3 & 0 & a_1^2 \cos a_3 \end{pmatrix} \right|_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De lineaire approximatie van f in het punt $a = 0$ is dus

$$f(x) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(x) \;.$$

Voor de lineaire approximatie van f in het punt $a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$ krijgt men zo

$$f(x) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt{2} \\ x_2 - \pi/4 \\ x_3 - \pi/4 \end{pmatrix} + o(x-a) \;.$$

I.h.b. is de lineaire approximatie van een functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gewoon

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + o(x-a) \;.$$

Rekenregels :

$$\begin{aligned} D(f+g)(a) &= Df(a) + Dg(a) \\ D(\lambda f)(a) &= \lambda Df(a) \\ D(f \circ g)(a) &= Df(g(a)) \circ Dg(a) \end{aligned}$$

waar in de laatste, de kettingregel, aan de rechter kant matrixmultiplicatie wordt toegepast. Hiermee opg.8.4.25–30 op p.428.

7.1 Dynamica rond evenwichtspunten

2e orde niet–lineaire differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + c\dot{y} + k \sin y \;=\; 0$$

(zie ook examples 1 en 2, p.176–8). $c = 0$: ongedempte slinger (hier $k = \frac{g}{l} \ldots$) $c > 0$: er is demping. Na terugbrengen naar een systeem van 1e orde differentiaalvergelijkingen d.m.v. $x_1 = y$ en $x_2 = \dot{y}$ worden de evenwichtspunten bepaald door

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \overset{!}{=} 0 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - k \sin x_1 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

en zijn dus de punten (x_1, x_2) met

$$x_2 \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \sin x_1 \;=\; 0 \;, \quad \text{ofwel } x_1 = n\pi \;, \; n \in \mathbb{Z} \;.$$

Lineaire approximatie in evenwichtspunten :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -cx_2 - k \sin x_1 \end{pmatrix} \;=\; f(x_1, x_2) \;=\; f(n\pi, 0) + Df(n\pi, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(x_1 - n\pi, x_2 - 0)$$

met

$$Df(n\pi,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos(n\pi) & -c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^n k & -c \end{pmatrix} \;.$$

Waarom is de linearisatie juist in de evenwichtspunten interessant ? Waar het vectorveld $f \neq 0$ is, blijft dat ook in een kleine omgeving zo (f continu!) en hebben we 'locaal' een bijna constante stroming. Maar rond evenwichtspunten is het 'constante deel' juist 0 , en het lineaire deel wordt belangrijk. $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix} \qquad \text{eigenwaarden} \qquad -\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2-4k}$$

$c = 0$: $\pm i\sqrt{k}$, ongedempte beweging periodiek. $c > 0$, maar klein (d.w.z. $c^2 < 4k$): $-\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2-4k}$, gedempte beweging draait naar evenwicht toe ; en hetzelfde gedrag voor $n \in \mathbb{Z}$ even ($n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots$). $n = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$ oneven):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +k & -c \end{pmatrix} \qquad \text{eigenwaarden} \qquad -\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4k}$$

ofwel $-\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4k} < 0$ en $-\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4k} > 0$. $c = 0$: $-\sqrt{k}$ en $+\sqrt{k}$, niet veel anders dan $c > 0$. Eigenvectoren zijn

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4k} \end{pmatrix} \text{ aantrekkend,} \qquad \begin{pmatrix} +1 \\ -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4k} \end{pmatrix} \text{ afstotend.}$$

Vanuit de informatie omtrent de evenwichtspunten 'kan' men het gehele faseportret samenvoegen, zie p.176,Fig.89 voor $c = 0$ en p.178,Fig.90 voor kleine $c > 0$. Voor plaatjes van de verschillende mogelijkheden voor het lineair gedeelte zie p.165+6. Hiermee opg.3.5.6–11 op p.183.

7.2 Krommen

Een kromme in het vlak wordt gegeven door

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (r_1(t), r_2(t)) \;=\; r(t) \end{array}$$

(bv. $r(t) = (t\cos t, t\sin t)$). De afgeleide $Dr(s) = (\dot r_1(s), \dot r_2(s))$ is de snelheidsvector, hij raakt aan de kromme en brengt de tangente voort. Net zo bij een kromme als

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (t, t^2, t^3) \end{array}$$

in de ruimte. Opgave : welke vectoren staan loodrecht op deze kromme in het punt $r(1) = (1,1,1)$? Verder p.434, opg.8.5.9–14 (+ raakvector bij $t = 1$).

Terug naar krommen in $\mathbb{R}^2$: deze kunnen ook door een vergelijking gedefinieerd zijn, bv.

$$x^2 \;+\; y^2 \;=\; 4 \;.$$

Wat is de tangente in het punt $(x,y) = (1,\sqrt{3})$? (Ligt op kromme, want $1^2+3=4$). Kies(!) een parametrisatie

$$\begin{aligned} r_1(t) &= x(t) = t \\ r_2(t) &= y(t) = +\sqrt{4-t^2} \ , \quad 0 \le t \le 2 \end{aligned}$$

die dus een stukje van de kromme parametriseert waar het gegeven punt ook op ligt, namelijk $(1,\sqrt{3}) = r(1)$. Bereken $\dot{r}_1(t) = 1$ en

$$\dot{r}_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{4-t^2} = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}$$

en vul $t=1$ in, dus

$$\dot{r}(1) = (1, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \ .$$

Wat gebeurt als we een andere parametrisatie kiezen ? Voor

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \ , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

is $(1,\sqrt{3}) = (\frac{2}{2}\sqrt{1}, \frac{2}{2}\sqrt{3}) = r(\frac{\pi}{3})$ en vanwege

$$\dot{r}(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

is $\dot{r}(\frac{\pi}{3}) = (-\sqrt{3}, 1)$. Dit 'ziet ten minste anders eruit', maar de vectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

zijn wel lineair afhankelijk.

Kunnen we de tangente ook bepalen zonder eerst een parametrisatie te kiezen ? Definieer $f(x,y) = x^2+y^2-4$ en bereken

$$Df(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0) \ .$$

Voor

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(x-x_0, y-y_0)$$

heeft $f(x,y)=0$ tot gevolg dat de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de vector

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

en we verkrijgen (opnieuw) de raakvector $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ en veelvouden. Hiermee p.434, opg.8.5.17+18 (vergeet '$x=0$' en '$z=1$'), bereken ook tangente in punten $(0,0)$ danwel $(\sqrt{6},2)$.

7.3 Oppervlakken

Mogelijke representaties : één vergelijking, bv. $x^2+4y^2+9z^2=36$. Dit zou men kunnen omzetten in (twee) expliciete vergelijking(en), namelijk $x=\pm\sqrt{36-4y^2-9z^2}$ waardor het oppervlak door y en z is geparametriseerd. Maar men kan ook met een parametrisatie als

$$\begin{aligned} x &= 6\sin\theta\cos\varphi \\ y &= 3\sin\theta\sin\varphi \\ z &= 2\cos\theta \end{aligned}$$

werken, waar $0\le\theta\le\pi$ en $0\le\varphi\le 2\pi$. Het raakvlak wordt opgespannen door de raakvectoren, bv. θ vast :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2} \\ \varphi=\frac{\pi}{3}}} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

of φ vast :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}r(\theta) = \begin{pmatrix} 6\cos\theta\cos\varphi \\ 3\cos\theta\sin\varphi \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2} \\ \varphi=\frac{\pi}{3}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Deze vectoren zijn lineair onafhankelijk. Alternatief kunnen we ook de afgeleide

$$\nabla(x^2+4y^2+9z^2-36) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 18z \end{pmatrix}\Bigg|_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

berekenen, want deze vector staat loodrecht op het oppervlak [controle :

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 12\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \ ].$$

De vector loodrecht op het oppervlak heet ook de normalenvector en vaak wordt zijn lengte op 1 geschaald $\Rightarrow$ heb twee keuzemogelijkheden voor het teken $\Rightarrow$ orientatie van het vlak. Bij oppervlakken (van een volume) is de orientatie het verschil tussen binnen en buiten. Hiermee p.495, opg.9.5.3–10 (eventueel m.u.v. opg.9.5.10).