Hertentamen Kansrekening 30 augustus 2005

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Tammo Jan Dijkema of Yaroslav Kondratyuk).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt. Je mag de volgende schattingen gebruiken:

  Stel $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \mathrm{d}\xi$.

  Dan $F(0.5) = 0.69, F(1) = 0.84, F(1.5) = 0.93, F(2) = 0.97, F(2.5) = 0.99$.
- *SUCCES!*

1. Het volgende experiment begint met het werpen van een munt. Als 'kop' valt gooit men vervolgens met een gewone dobbelsteen. Als 'munt' valt gooit men met een dobbelsteen waar de zijkant 'zes' is vervangen door een (tweede) zijkant 'één'.

   (i) Stel voor dit experiment een model op.

   (ii) Bepaal voor $k \in \mathbb{N}$ de kans dat de k–de dobbelsteenworp X_k een 'één' is.

   (iii) Bereken de verwachtingswaarde $E(X_k)$.

   (iv) Als de eerste twee dobbelsteenworpen oneven zijn, wat is dan de (voorwaardelijke) kans dat ook de derde dobbelsteenworp een oneven getal is?

   (v) Als de eerste twee dobbelsteenworpen oneven zijn, wat is dan de (voorwaardelijke) kans dat de muntworp 'kop' was?

2. Uit een urn met de 26 letters van het alfabet worden deze zonder terugleggen getrokken, totdat er een klinker komt (dan wordt gestopt).

   (i) Bepaal de kans dat men ten minste 3 pogingen nodig heeft.

   (ii) Als de eerste twee letters medeklinkers zijn, wat is dan de (voorwaardelijke) kans dat de volgende twee letters enveneens medeklinkers zijn?

   (iii) Bereken het verwachte aantal trekkingen.

   We veranderen het experiment van 'zonder terugleggen' naar 'met terugleggen'.

   (iv) Wat is nu het verwachte aantal trekkingen?

   (v) Waarom is het aantal trekkingen ook 'met terugleggen' eindig met kans 1?

3. Gegeven zijn twee continue toevalsvariabelen X, Y met een simultane kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(y+1)} & x > 0\,,\ y > 0 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (i) Bereken de marginale verdelingen.

   (ii) Bepaal voor $x > 0$ de voorwaardelijke verwachting van Y gegeven $X = x$.

   (iii) Laat zien dat $X \cdot Y$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

   (iv) Bereken de covariantie $\mathrm{cov}(X, Y)$.

   (v) Zijn X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen?

4. In een boek van 200 pagina's zijn de drukfouten onafhankelijk, met gemiddeld 1 fout per 4 pagina's.

   (i) Geef aan waarom deze situatie door een Poisson–proces kan worden beschreven.

   (ii) Bereken de kans van precies 5 drukfouten op de eerste 10 pagina's.

   (iii) Wat is het verwachte aantal pagina's met minstens 3 drukfouten?

   (iv) Bepaal de kans dat het hele boek niet meer dan 100 drukfouten bevat.

   (v) We beginnen bovenop pagina 146 te lezen en zijn geïnteresseerd in het verwachte aantal pagina's μ tot de volgende drukfout. Welke van de twee volgende redeneringen is juist, en waar zit precies de fout in de verkeerde redenering?

   A Bovenop p.146 is een toevallig beginpunt tussen twee drukfouten, en deze zijn onafhankelijk. Vanwege de symmetrie is μ dan de helft van het verwachte aantal bladzijden tussen deze, dus $\mu = \frac{1}{2}4 = 2$.

   B Bovenop p.146 is een toevallig beginpunt en vanwege de geheugenvrijheid hangt het verwachte aantal bladzijden niet af van dit beginpunt, dus $\mu = 4$.

Bonusopgave (telt even zwaar als een van de deelopgaven) Zij $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ een toevalsvariabele met de eigenschap

$$P(X = k) \quad \geq \quad P(X = k+1) \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \quad .$$

Laat zien dat dan de ongelijkheden

$$P(X = k) \quad \leq \quad \frac{2E(X)}{k^2} \quad \forall_{k \in \mathbb{N}}$$

geldig zijn.