Modellen en Simulatie 2006, inleveropgave 1

Inleverdatum: 27 februari 2006 (9:00)

Herten

Op een groot landgoed leeft een populatie herten. We zijn geïnteresseerd in de ontwikkeling van de hertenpopulatie. Het aantal herten aan het einde van het n-de jaar geven we aan met N_n. We nemen aan dat de hertenpopulatie zich ontwikkelt volgens het model van Ricker, dat wil zeggen, de hertenpopulatie in een bepaald jaar hangt af van de populatie in het voorgaande jaar volgens de volgende recursierelatie

$$N_{n+1} = ke^{-\frac{N_n}{N}} N_n, \tag{1}$$

waarin $N, k > 0$ parameters zijn.

Opdracht 1. Start het Mathematica notebook `iteratie.nb` en bestudeer het. Neem aan dat

$$k = 1,1, \quad N = 2000, \quad \text{en} \quad N_0 = 150.$$

Gebruik het notebook `iteratie.nb` om een plot van de ontwikkeling van de populatie herten in de eerste 50 jaar te maken: zet op de horizontale as de tijd uit, en op de verticale as de populatiegrootte.

Doe hetzelfde als

$$k = 1,1, \quad N = 2000, \quad \text{en} \quad N_0 = 400.$$

Welke waarde verwacht je, als $k = 1,1$ en $N = 300$, voor

$$\lim_{n\to\infty} N_n?$$

Beantwoord deze laatste vraag ook voor algemene $k, N > 0$.

Bepaal, voor algemene waarden van N en k, de evenwichtspunten van de recursierelatie (1).

Logistische groei

Uit observaties van de populatie blijkt dat de ontwikkeling van de hertenpopulatie beter beschreven wordt door het model van Verhulst, dat wil zeggen

$$N_{n+1} = aN_n(1 - N_n/N), \tag{2}$$

waarin a een nader te bepalen constante is, en

$$N = 1000.$$

Als deze recursie in een zeker jaar een negatief aantal herten als resultaat oplevert, d.w.z. als er een n is waarvoor $N_n \leq 0$, dan zeggen we dat de populatie is uitgestorven, en stellen we $N_k = 0$ voor alle $k \geq n$.

We normeren de recursie door de nieuwe variabele $x_n = N_n/1000$ in te voeren. Als voor een gegeven n geldt dat $x_n = 0,14$, zijn er in het jaar n dus 140 herten.

Het is eenvoudig in te zien dat de getallen x_n voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \tag{3}$$

We bekijken nu eerst de recursie (3) zelf, zonder daarbij aan herten- of zelfs maar dierpopulaties te denken.

Op het college zijn voor elke waarde van a de evenwichtswaarden van (3) bepaald en op stabiliteit onderzocht. We bekijken de situatie nu nogmaals, met behulp van de computer. Het gedrag van de recursieve rijen die voldoen aan (3) kan zichtbaar gemaakt worden met de procedure `bifurcatie` uit het Mathematica notebook `Iteratie.nb`.

Opdracht 2. Gebruik de procedure `bifurcatie` om een grafiek te maken waarin op de horizontale as de waarde van a (tussen 0 en 4) is uitgezet en verticaal, voor elke waarde van a, de waarden van x_{50} tot en met x_{100}. Als startwaarde kun je $x_0 = 0,5$ kiezen, maar het blijkt dat de plaatjes vrijwel onafhankelijk zijn van x_0. Dit kun je eventueel zelf nagaan door andere beginwaarden x_0 te kiezen.

Bij het beantwoorden van de volgende vragen kan het handig zijn om in de procedure `bifurcatie` de waarden van de parameter a te beperken tot een kleiner gebied om interessante gebieden te bekijken. Licht je antwoorden toe!

- Voor welke waarden van a concludeer je uit je grafiek dat er sprake is van een stabiel evenwicht? Komt je antwoord overeen met de waarden die op het college zijn gegeven?
- Is het ook mogelijk om instabiele evenwichten op het scherm te zien?
- Voor welke waarden van a is er sprake van een stabiele 2-baan? Is het ook mogelijk om waarden van a te vinden waarvoor een stabiele 3-baan optreedt?

Kun je deze vragen ook voor het model van Ricker beantwoorden?

De vragen 3 tot en met 5 zijn theorievragen, dus voor het beantwoorden ervan is de computer niet nodig.

Opdracht 3. Uit onderzoek is gebleken dat voor onze hertenpopulatie geldt dat $a = 3/2$. Is er een stabiel evenwicht bij deze waarde van a en zo ja, wat is de waarde?

Ons landgoed is niet zo vreedzaam als wij aanvankelijk dachten. De eigenaar en zijn vrienden jagen er namelijk op herten, deels uit oogpunt van populatiebeheer, deels uit morbide vermaak. De eigenaar besluit dat er jaarlijks een vast aantal herten, zeg J, kunnen worden afgeschoten. Dit betekent dat de populatie zich nu ontwikkelt volgens de formule

$$N_{n+1} = \frac{3}{2} N_n (1 - N_n/1000) - J. \tag{4}$$

Hier nemen we aan dat de factor $3/2$ niet is afgenomen door de grotere stress op de dieren. Er geldt nog steeds dat de populatie uitsterft in jaar n als dit oplevert dat $x_n \leq 0$.

Opdracht 4. Laat zien dat de getallen $x_n = N_n/1000$ nu voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \frac{3}{2} x_n (1 - x_n) - b, \tag{5}$$

waarin $b = J/1000$.

Opdracht 5. De eigenaar van het landgoed besluit dat een constant aantal herten van 200 op zijn landgoed wenselijk zou zijn. Is het mogelijk om J, en dus b, zo te kiezen dat er ieder jaar 200 herten zijn? Is dit aantal stabiel?

Beantwoord deze vragen nogmaals voor een aantal van 100 herten.

Opdracht 6. Onderzoek nu voor $0 \leq b \leq 0,06$ de recursie (5) op evenwichtspunten. Onderzoek of deze stabiel zijn. Zet in een grafiek de evenwichtpunten uit tegen de waarden van b tussen 0 en $0,06$ en geef aan waar we te maken hebben met stabiliteit en waar met instabiliteit.

In de loop van de tijd blijkt, dat de factor $\frac{3}{2}$ in (4) veranderd is. We bekijken daarom nu de algemenere recursie

$$x_{n+1} = \max(a x_n (1 - x_n) - b, 0) \tag{6}$$

Door het maximum van $a x_n (1 - x_n)$ en 0 te nemen, wordt ook het eventuele uitsterven van de populatie in het model opgenomen.

Het gedrag van (6) voor verschillende waarden van b kan zichtbaar gemaakt worden met Mathematica. Hierbij kan opnieuw het notebook `iteratie.nb` gebruikt worden.

Opdracht 7. Gebruik Mathematica om, voor $a = 1$, $a = \frac{3}{2}$, $a = \pi$, en $a = 3,8$ een grafiek te produceren met op de horizontale as de waarde van b (tussen 0 en $0,06$) en verticaal (op elke lijn) de waarden van $x_{50}, \ldots, x_{100}$ voor de bijbehorende waarde van b.

Vergelijk de verkregen grafiek voor $a = \frac{3}{2}$ met de antwoorden op vraag 6. Hangt het gedrag van (5) af van de keuze van de beginwaarde x_0?

Opdracht 8. Gebruik tenslotte het iteratiediagram-moduul `iteratiediagram` uit het notebook om een iteratiediagram voor (6) te produceren. Kies daarbij $a = 1,5$, $b = 0,03$ en $x_0 = 0,7$. Leg uit wat het plaatje weergeeft. Herhaal dit voor $b = 0,045$.

Probeer vraag 5 nogmaals te beantwoorden, dit keer met behulp van het moduul `iteratiediagram`.

Wie nog wat tijd over heeft kan `iteratiediagram` gebruiken om het gedrag van (6) voor verschillende waarden van a en b te bekijken. Wat valt er (gelet op de resultaten gevonden met `bifurcatie`) te verwachten voor grote waarden van a?