Proeftentamen

1. Beschouw de Ricker-functie

$$f(x) := a\, x\, e^{-x}$$

waarbij a een parameter is die voldoet aan $a > 0$. Merk op dat $f(0) = 0$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, terwijl $f(x) > 0$ voor alle $x > 0$.

(a) Bereken voor willekeurige $a > 0$ het maximum van f op $[0, \infty)$. Een populatie bacteriën ontwikkelt zich volgens de recursie

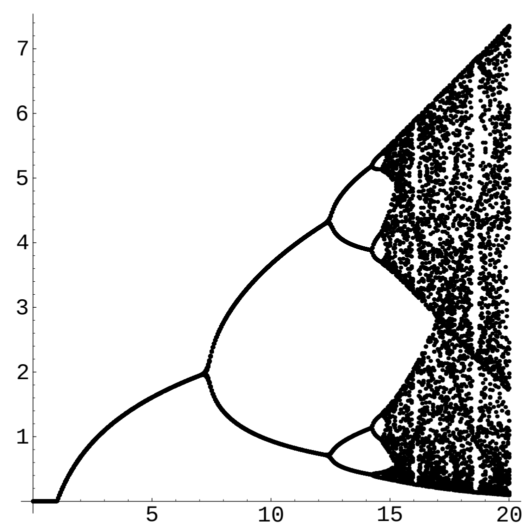
$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \geq 0).$$

Hierbij staat x_n voor de (geschaalde) populatiegrootte op dag n.

(b) Bepaal voor willekeurige $a > 0$ de evenwichtspunten van deze recursie. Merk op dat alleen niet-negatieve oplossingen zinvol zijn. Voor welke waarden van a is dat het geval?

(c) Ga voor elk van de evenwichtspunten (uit onderdeel b) na voor welke waarden van $a > 0$ dit evenwichtspunt stabiel is.

(d) In het onderstaande bifurcatiediagram voor deze klasse van recursierelaties (bij een willekeurige maar vaste waarde van $x_0 = 0.2$) is het lange-termijngedrag van de oplossing x_n getekend als functie van a. Laat in korte bewoordingen zien hoe je het antwoord op het vorige onderdeel kunt controleren aan de hand van de waarden van dit bifurcatiediagram in $a = 0.1; a = 5; a = 10$.



2. De drie supermarkten in een dorp, supermarkt 1, 2 en 3, zijn verwikkeld in een felle prijzenoorlog. De inwoners van het dorp blijken niet erg trouwe klanten te zijn: er zijn er aardig wat die per week vaststellen waar ze hun boodschappen gaan doen.

   We definiëren, voor $1 \leq i \leq 3$,

   $k_i(n)$ = het aantal klanten dat in week n (sinds het begin van de prijzenoorlog) zijn boodschappen doet in supermarkt i, en

$$k(n) = (k_1(n), k_2(n), k_3(n))^T.$$

   Er geldt

$$k(n+1) = Pk(n),$$

   met

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Geef de bij de overgangsmatrix P horende gerichte graaf. Is P aperiodiek? Irreducibel? Is P een kansmatrix? (Geef toelichting)

   (b) Wat is de kans dat een klant die in week 0 zijn boodschappen deed in supermarkt 2 voor het eerst in supermarkt 1 winkelt in week 3?

   (c) Heeft P een dominante eigenwaarde?

   (d) Wat is, voor $k = (k_1, k_2, k_3)^T \in \mathbb{R}^3$ met $k_1, k_2, k_3 \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P^n k?$$

   Supermarkt 1 maakt veel reclame buiten het dorp, en trekt daardoor wekelijks 10 klanten van buiten het dorp die eerder hun boodschappen in hun eigen dorp deden. Neveneffect hiervan is, dat het zo druk wordt in supermarkt 1 dat een deel van de klanten besluit zijn boodschappen voortaan niet meer in het dorp te doen. In deze nieuwe situatie geldt:

$$k(n+1) = Ak(n) + b, \tag{1}$$

   met

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6-\alpha & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   met $0 < \alpha \leq 6$.

(e) Geef de stationaire oplossing van (1). Is de stationaire oplossing stabiel als $\alpha = 4$?

3. Twee electronicazaken, X en Y concurreren met elkaar. De omzet van de twee winkels (in veelvouden €100.000) ontwikkelt zich volgens het stelsel differentiaal vergelijkingen

$$x'(t) = 2x(t)(1 - x(t)) - 3x(t)y(t) \tag{2}$$
$$y'(t) = cy(t)(1 - y(t)) - dx(t)y(t), \tag{3}$$

met $c, d > 0$. Hierbij is $x(t)$ de omzet van winkel X, en $y(t)$ de omzet van winkel Y.

(a) Hoe gedraagt $x(t)$ zich als $y(0) = 0$ en $0 < x(0) < 1$? (Het is niet nodig een oplossing van de vergelijking te geven: een schets van de oplossing of een beknopte omschrijving volstaat.)

(b) Definieer de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(1-x) - 3xy \\ cy(1-y) - dxy \end{pmatrix}.$$

Geef de Jacobi matrix van f.

(c) Geef de stationaire oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen (2-3).

(d) Laat $c = 3$, $d = 4$. Geef aan welke van de in het vorige onderdeel gevonden stationaire oplossingen stabiel zijn.

(e) Laat weer $c = 3$, $d = 4$. Schets waar in het gebied $-0.5 \leq x, y \leq 1.5$

$$x' = 0$$

en waar

$$y' = 0.$$

Geef in dezelfde schets aan waar gelijktijdig voldaan is aan de twee voorwaarden

$$x' > 0 \text{ en } y' > 0.$$

(f) Een winkel gaat failliet als de omzet in een jaar €0 bedraagt. Is het in dit model mogelijk dat beide winkels failliet gaan?

Tijdens een crisis in de electronica branche gaat winkel Y failliet. De crisis veroorzaakt ook een sterke verandering in het aankoopgedrag van de klanten van zaak X. In de nieuwe situatie wordt de omzet van winkel X beschreven door

$$x'(t) = (1 + \sin(t))x(t) + 2. \tag{4}$$

(g) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (4).

4. In een fietsfabriek worden racefietsen en mountainbikes gemakt. De netto winst per racefiets is €225 en de netto winst per mountainbike is €300 euro. Met de beschikbare arbeidskracht kunnen maximaal 800 fietsen per week gemaakt worden en beide types kosten evenveel werk. Met een bepaalde boormachine kan 40 uur per week gewerkt worden. Voor de vervaardiging van een racefiets is de boormachine $\frac{1}{25}^{ste}$ uur nodig en voor een mountainbike tweemaal zo lang. Van een bepaald soort buis zijn 8 eenheden nodig voor een racefiets en 14 eenheden voor een mountainbike. De toelevering vanuit de aluminiumfabriek is maximaal 5600 eenheden per week. Hoevel racefietsen en hoeveel mountainbikes moet de fabriek per week produceren om een zo groot mogelijke winst te maken? En hoe groot is die winst dan?