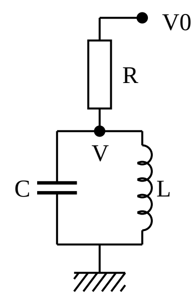
Modellen en Simulatie 2006, inleveropgave 3

Inleverdatum: 10 april, 9:00 uur

Opmerking bij het schrijven van het verslag: bij een aantal opdrachten in deze opgave wordt gevraagd plots te genereren van oplossingen van differentiaalvergelijkingen. Geef in je verslag per opdracht slechts één figuur ter illustratie, tenzij anders vermeld. Geef van de overige geproduceerde figuren een duidelijke beschrijving.

Resonantie in een electronische schakeling

In deze opgave gaan we het verschijnsel van de aangedreven gedempte harmonische oscillator onderzoeken aan de hand van een electronische schakeling, opgebouwd uit een weerstand, een condensator en een spoel. Een voorbeeld van zo'n schakeling zie je hieronder.



Figuur 1: Voorbeeld van een electronische schakeling

(Zie ook het dictaat [1, p. 50].) Het gedrag van zo'n schakeling kan worden beschreven met behulp van een stelsel differentiaalvergelijkingen. Om te zien hoe dit in zijn werk gaat bekijken we eerst de verschillende componenten afzonderlijk.

- Bij een **weerstand** is er een erg eenvoudig verband tussen de stroom $I(t)$ die op tijdstip t door de weerstand loopt en de spanning $V(t)$ over de weerstand; volgens de *wet van Ohm* geldt
$$V(t) = I(t)R,$$
waarbij R de weerstand van de weerstand is.

- Bij een **condensator** geldt
$$\dot{V}(t)C = I(t),$$
waarbij $V(t)$ de spanning over de condensator is, en $I(t)$ de stroom die door de condensator loopt. De constante C is de capaciteit van de condensator.

- Bij een **spoel** tenslotte geldt
$$V(t) = \dot{I}(t)L,$$
waarbij $I(t)$ en $V(t)$ de stroom door de spoel en de spanning over de spoel aangeven en L staat voor de impedantie van de spoel.

We bekijken nu de schakeling in figuur 1, bestaande uit een weerstand met weerstand R, en, parallel geschakeld, een condensator met capaciteit C en een spoel met impedantie L. De condensator en de spoel worden geaard, de weerstand wordt aangesloten op een spanningsbron die een spanning $V_0 = V_0(t)$ levert.

Door de weerstand loopt een stroom I, door de spoel een stroom I_1 en door de condensator een stroom I_2. Er geldt

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0(t) - V(t)}{R} && (1) \\ I_1(t) &= \dot{V}(t)C && (2) \\ \dot{I}_2(t) &= \frac{V(t)}{L} && (3) \\ I(t) &= I_1(t) + I_2(t) && (4) \end{aligned}$$

Opdracht 1. Differentieer vergelijking (2) en gebruik de vergelijkingen (1–4) om na te gaan dat $V(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC}V = \frac{1}{RC}\frac{dV_0}{dt}, \tag{5}$$

zie ook pagina 50 in het dictaat [1]. Deze schakeling gedraagt zich als een harmonische oscillator. Laat

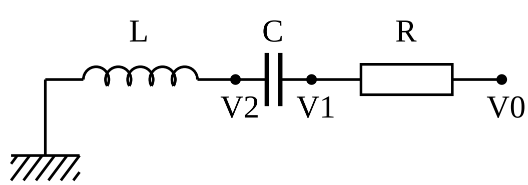
$$R = 0.2, \quad C = L = 1, \quad V_0(t) = \sin(\omega t)$$

en gebruik Mathematica om de oplossing van (5) te plotten als

$$V(0) = 5, \quad \dot{V}(0) = 1,$$

waarbij t loopt van 0 tot 8π. Kies zelf een interessante waarde voor ω. Voeg de gebruikte Mathematica code toe aan het verslag. (Gebruik eventueel het notebook `resonantie.nb`.)

We bekijken nu onderstaande schakeling waarin een weerstand, een condensator en een spoel in serie zijn geschakeld.



De spoel wordt geaard en de weerstand wordt aangesloten op een spanningsbron met spanning $V_0 = V_0(t)$. De spanning over de weerstand geven we aan met $V_1 - V_0$ en die over de spoel met V_2. Door onze schakeling loopt een stroom $I = I(t)$ en er geldt

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0(t) - V_1(t)}{R} && (6) \\ I(t) &= (\dot{V}_1(t) - \dot{V}_2(t))C && (7) \\ \dot{I}(t) &= \frac{V_2(t)}{L}. && (8) \end{aligned}$$

Opdracht 2. De spanningen V_1 en V_2 voldoen aan een stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\dot{V}_1(t) = -\frac{RV_2(t)}{L} + \dot{V}_0(t) \tag{9}$$

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_1(t) + A(V_1(t) - V_0(t)). \tag{10}$$

Gebruik (6–8) om de waarde van de constante A te bepalen.

Aan dit stelsel voegen we de beginvoorwaarden

$$V_1(0) = \gamma_1, \quad V_2(0) = \gamma_2$$

toe.

Opdracht 3. Laat

$$R = 0.2, \quad L = 1, \quad C = 1 \quad \text{en} \quad V_0(t) = \sin(\omega t),$$

met $\omega = 0.1$. Gebruik Mathematica om in één figuur de grafieken van de oplossing $V_1(t)$, $V_2(t)$ en de grafiek van $V_0(t)$ als functie van t te genereren voor

$$\gamma_1 = 0.1, \quad \gamma_2 = 0.$$

Laat t lopen over ongeveer 5 perioden van het ingangssignaal. Je kunt hierbij het notebook `resonantie.nb` gebruiken. Hoe groot zijn, voor voldoende grote waarden van t, ongeveer de amplitudes ρ_1 resp. ρ_2 en de faseverschillen ϵ_1 resp. ϵ_2 met V_0 van V_1 resp. $V_2(t)$?

Opdracht 4. Kies nu voor ω een aantal (minstens 6, licht je keuze toe) waarden in het interval $[0, 10]$. Gebruik weer Mathematica om in één figuur de grafieken van de oplossing $V_1(t), V_2(t)$ en de grafiek van $V_0(t)$ als functie van t te genereren. Wat valt je per geval op m.b.t. de amplitude ρ_2 en het faseverschil ϵ_2 (met V_0) van V_2, na uitdemping van de eigentrillingen? Geef in je verslag 2 plaatjes die verschillend gedrag demonstreren.

Opdracht 5. Kies nu $\omega = 1$ weer vast. Wat is de invloed van de keuze van γ_1 en γ_2 op de (uiteindelijke) oplossing? Varieer zelf deze beginwaarden over bijv. -2; 0; 2 ($3 \times 3 = 9$ gevallen).

In het vervolg van de opgave bekijken we het gedrag van de functie $V_2(t)$, waarbij we $V_1(t)$ verder buiten beschouwing laten.

Opdracht 6. Leidt uit het beginvoorwaardenprobleem voor de elektronische schakeling één tweede-orde differentiaalvergelijking af voor V_2. Wat zijn de beginvoorwaarden ($V_2(0) = \ldots$; $\dot{V}_2(0) = \ldots$)?

Opdracht 7. Beantwoord opdracht 3 t/m 5 voor de oplossing V_2 van de tweede-orde vergelijking, om na te gaan of er verschillen zijn met de eerdere resultaten. Als dit het geval is, neem dan de relevante figuren op in je verslag. Voeg de gebruikte Mathematica code toe aan je verslag.

Opdracht 8. Kies $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Wat is de invloed van de keuze van R, L en C op de (uiteindelijke) oplossing $V_2(t)$? Bekijk de oplossing voor tenminste 6 verschillende waarden van de parameters. Voeg twee figuren toe aan je verslag en geef een kwalitatieve beschrijving van de overige resultaten.

In het dictaat [1, p.50–51] staat beschreven dat de algemene oplossing van de vergelijking

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f\sin(\nu t)$$

gegeven wordt door

$$x(t) = x_{homogeen}(t) + \rho\sin(\nu t - \delta), \tag{11}$$

waarbij $x_{homogeen}(t)$ de oplossing is van het homogeen gemaakte probleem.

Opdracht 9. We passen de theorie voor de aangedreven gedempte harmonische oscillator uit het dictaat [1] toe op de vergelijking voor $V_2(t)$. De oplossing is van de vorm (11).

i. Ga na hoe ρ en δ worden bepaald door de gegeven parameters R, L, C en ω, en geef de algemene oplossing $V_2(t)$.

   Voorstel voor het vervolg (waarom?): vervang ρ door $-\rho$ en δ door $\delta - \pi$.

ii. Wat zijn de minimale en maximale waarde van ρ en wanneer worden deze aangenomen?

iii. Wat kun je (kwalitatief) zeggen over ρ en δ in elk van de volgende gevallen? Vergelijk met je experimentele uitkomsten.

   - $\frac{1}{\omega^2} \ll LC - \frac{1}{2}(RC)^2$
   - $\frac{1}{\omega^2} \approx LC - \frac{1}{2}(RC)^2 = LC(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2C}{L})$ (Neem aan dat $\frac{R^2C}{L}$ klein is.)
   - $\frac{1}{\omega^2} \gg LC - \frac{1}{2}(RC)^2$.

iv. Plot ook een grafiek van ρ en δ als functie van ω, bij vaste $R = 0.2$ en $L = C = 1$.

Beschouw tenslotte het originele niet-autonome stelsel (9–10) van twee eerste-orde differentiaalvergelijkingen.

Opdracht 10. In opdracht 9 heb je de algemene oplossing voor $V_2(t)$ gegeven. Gebruik deze oplossing om de algemene oplossing van de vergelijking voor V_1 te vinden. Laat $R = 0.2$; $L = C = 1$; $V_0(t) = \sin(wt)$ waarin $w = 1$. Kies zelf beginwaarden γ_1, $\gamma_2 = 0$, en plot in één plaatje de grafieken van V_0, V_1 en V_2 als functie van t. Laat t lopen over 5 perioden van het ingangssignaal.

Referenties

[1] F. Beukers, *Modellen en Simulatie*, 2003, Universiteit Utrecht.