Modellen en Simulatie 2006, inleveropgave 2

Inleverdatum: 15 maart 2006 (9:00)

De stuiterende bal

We laten een bal op een tafel vallen, waarvandaan hij wordt teruggekaatst. De tijd tot de daarop volgende impact is dan

$$\tau = \frac{2v}{g}$$

waar g de gravitatie-versnelling is. De snelheid zal tijdens de vlucht geleidelijk afnemen, totdat in het bovenste punt van de baan de kinetische energie volledig is omgezet in potentiële energie en de bal vervolgens weer naar beneden valt. Bij de volgende impact is de potentiële energie weer omgezet in kinetische energie; in termen van de j-de impact is de $(j+1)$-de impact gegeven door tijdstap $t_{j+1} = t_j + \tau_j$ (waar de index j aangeeft dat de tussenliggende tijd τ van de beginsnelheid v_j afhangt) en nieuwe beginsnelheid $v_{j+1} = \alpha v_j$, waar $\alpha \in [0,1]$ het energieverlies tijdens vlucht en terugkaatsen meet. Voor $\alpha = 1$ is er geen luchtwrijving en stuitert de bal volledig elastisch; voor $\alpha = 0$ blijft de bal meteen liggen.

We kiezen eenheden waarin $g = \frac{1}{2}$ en modelleren de stuiterende bal d.m.v. de afbeelding

$$f_\alpha : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v \end{pmatrix} .$$

We zijn geïnteresseerd in het gedrag voor (lichte) wrijving, dus $\alpha < 1$ maar tegelijk $\alpha > 0$.

Opdracht 1. Gebruik het notebook `stuitbal.nb` om een overzicht te verkrijgen over de door f_α gedefinieerde dynamica voor verschillende waarden van α in het open interval $]0,1[$. Bepaal vervolgens de dekpunten van f_α en hun stabiliteit. Wat betekent dit voor de stuiterende bal ?

Kun je ook een interpretatie voor de eigenwaarde 1 geven ?

Aandrijving

Om de dynamica wat spannender te maken gaan we de tafel periodiek aandrijven; het tafelblad blijft altijd loodrecht op de verticale as maar beweegt volgens $-\beta \sin t$ op en neer (we kiezen tijdseenheden waarin de periode van tafeltrilling 2π is). Stel $\gamma = (1+\alpha)\beta$ en beredeneer hoe je aan het volgende model voor de stuiterende bal komt:

$$f_{\alpha,\gamma} : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v - \gamma \cos(t+v) \end{pmatrix} .$$

Hierbij is $\gamma > 0$ en nog steeds $0 < \alpha < 1$.

Opdracht 2. Bereken de Jacobi-determinant, dat is $\det Df(t,v)$ waar

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} .$$

Een constante Jacobi-determinant betekent dat f de oppervlakte uniform laat krimpen (en voor $\alpha = 1$ zelfs behoudt). Omdat Df voor alle (t,v) inverteerbaar is verwachten we dat ook f zelf inverteerbaar is.

Opdracht 3. Laat zien dat f inverteerbaar is door de inverse f^{-1} expliciet aan te geven.

De afbeelding f verandert niet als we de coördinatentransformatie

$$t \mapsto t + 2n\pi \ , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

toepassen. Men zegt ook dat de afbeelding f equivariant is onder de door (1) gedefinieerde groepsactie van $\mathbb{Z}$ op $\mathbb{R}^2$ (in de tweede coördinaat v doet deze groepsactie niets). Hierdoor wordt een equivalentierelatie op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd, de quotientruimte kan met de cylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ worden geïdentificeerd en f induceert een afbeelding van de cylinder op zichzelf (zoals men in het college groepentheorie kan leren).

Dit kunnen we gemakkelijk implementeren door f in de variabele t tot $[0, 2\pi[$ te beperken en van f_1 een zodanig veelvoud van 2π af te trekken dat we weer in $[0, 2\pi[$ terecht komen. De zo geherdefinieerde f lijkt dan in punten (t, v) met $t = 0$ niet meer continu (laat staan differentieerbaar) te zijn, maar als we $[0, 2\pi[$ tot een cirkel aan elkaar plakken komt het wel goed (zoals men in het college differentieerbare variëteiten kan leren). I.h.b. verandert det Df niet voor deze geherdefinieerde afbeelding. Is het nodig om de formule voor de inverse f^{-1} aan te passen ?

Opdracht 4. Bereken de dekpunten van (de geherdefinieerde) f in afhankelijkheid van de parameters α en γ. Voor welke parameterwaarden zijn er stabiele dekpunten ? Hoe verliezen dekpunten hun stabiliteit ? Geef voor welgekozen parameterwaarden faseportretten aan waarin een stabiele baan van periode 2 te zien is. Lukt dit ook voor periode 4(8(16)) ?

Voor sommige oplossingen wordt v negatief, en dan is er natuurlijk geen sprake meer van een weerkaatsende bal. De afbeelding f blijft wel goed gedefinieerd. Kun je een interpretatie geven voor $f(t, v)$ als $v < 0$?

Chaotisch gedrag

Net als in de logistische afbeelding leidt de reeks van periodeverdubbelingen uiteindelijk tot chaos. Dit laten we zien door een hoefijzer in de afbeelding te construeren.

Opdracht 5. Geef (voor welgekozen parameterwaarden) vierhoeken Q aan die door f tot een lange smalle vierhoek worden gerekt en dan dubbelgevouwen op Q komen te liggen.

We zijn geïnteresseerd in de verzameling $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$.

Opdracht 6. Beredeneer waarom f beperkt tot Λ chaotisch is.

Kun je dit chaotisch gedrag in faseportretten terug vinden ?

Opdracht 7. Voor kleinere waarden van α zul je γ moeten verhogen. Is het in principe mogelijk de parameter α overbodig te maken door altijd γ geschikt te kiezen ?

In de meeste gevallen zul je de waarde van α vast houden en alleen γ variëren. Maar ga altijd na in hoeverre er afhankelijkheid van de waarde van α is. Het is ook belangrijk om voor alle resultaten na te gaan wat deze voor de dynamica van de stuiterende bal betekenen.