Tentamen modellen en simulatie 16 april 2007

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Tammo Jan Dijkema of Steven Wepster).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. In deze opgave bestuderen we een vispopulatie met 3 generaties. De jongste generatie heeft een overlevingskans $p \in\ ]0,1[$ om van ei door te groeien naar volwassen vis. Deze vormen de tweede generatie, de helft ervan produceert elk (gemiddeld) 10.000 eitjes en sterft, de andere helft gaat door naar de derde generatie. Iedere vis die de derde generatie bereikt produceert (gemiddeld) 10.000 eitjes en sterft.

   (*i*) Stel een model op. Laat hiervoor $s(n) \in \mathbb{R}^3$ het aantal vissen in tijdstap n zijn en stel de 3×3 matrix L op die de dynamica

   $$s(n+1) \quad = \quad L \cdot s(n)$$

   bepaalt.

   (*ii*) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is L aperiodiek? Heeft L een dominante eigenwaarde?

   (*iii*) Stel de eigenwaardevergelijking $f(\lambda) = 0$ op voor L. Bereken de afgeleide $f'(\lambda)$ en schets de 3 mogelijke gevallen voor de verdeling van reële wortels van f. Concludeer dat in alle 3 gevallen de dominante eigenwaarde de enige positieve reële eigenwaarde is.

   (*iv*) Bereken de waarde van p waarvoor 1 een eigenwaarde is van L en concludeer dat 1 dan de dominante eigenwaarde is.

   (*v*) In een meer worden 500 tweedejaars vissen uitgezet, dus $s(0) = (0, 500, 0)$. Als $p = 10^{-4}$, wat is dan de populatie na (oneindig) veel jaren?

(z.o.z.)

2. Beschouw de functie $f : [0,1[\longrightarrow [0,1[$ gegeven door

$$f(x) \ := \ 10x - \text{entier}(10x)$$

waar entier(y) het gehele gedeelte van y is, bv. entier(π) = 3.

(i) Bereken $f^n(x_0)$ voor $n = 1, 2, 3$ en $x_0 = 0.1642007$.

(ii) Laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

(iii) Ga na dat in elke omgeving $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \ldots$ periodiek is. *Hint: hoe ziet de grafiek van f^n eruit, i.h.b. voor hoge waarden van n ? Alternatief: gebruik symbolische dynamica op 10 cijfers* $\{0, \ldots, 9\}$.

(iv) Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden.

3. Gegeven het parameterafhankelijke systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - \alpha y \\ \dot{y} &= \alpha x - xy \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen, waarbij $\alpha > 0$.

(i) Bepaal de evenwichtspunten van dit systeem.

(ii) Geef de Jacobimatrix van dit systeem.

(iii) Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitstype(s), afhankelijk van de waarde van α.

(iv) Hoe verandert de situatie als we $\alpha < 0$ nemen?

4. Een fabrikant wil een nieuwe notenmelange op de markt brengen. De belangrijkste ingrediënten zijn amandelen en hazelnoten. Amandelen bevatten voor 5 % vet en voor 40 % suiker en hazelnoten bevatten voor 40 % vet en voor 20 % suiker. De marketingafdeling heeft twee voorwaarden samengesteld. Het vetgehalte moet tussen 10 % en 20 % liggen en het suikeraandeel moet minstens 30 % zijn.

De prijzen van de ingrediënten zijn (per kilogram) 5 euro voor amandelen en 7 euro voor hazelnoten. Hoe duur zal de notenmelange (per kilogram) minstens zijn, kosten voor productie en marketing buiten beschouwing gelaten?