Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Störungstheorie dynamischer Systeme

Heinz Hanßmann

1. Übungsblatt Aachen, den 8.4.2008

Sommersemester 2008

1. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert eine lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$, bezeichne das entsprechende Vektorfeld mit L_A. Neben der Lie-Klammer $[L_A, L_B]$ gibt es auch den Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen; zeige

   $$[L_A, L_B] \;=\; -L_{[A,B]} \;.$$

   Zeige weiter

   $$\varphi_t \circ \psi_s \;-\; \psi_s \circ \varphi_t \;=\; s\,t\,[A, B] \;+\; \mathcal{O}\left((s^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

   für die Flüsse φ von L_A und ψ von L_B und schließe, daß $[L_A, L_B] = 0$ falls diese beiden Flüsse kommutieren.

2. Beweise den folgenden Satz. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x_0) = 0$ und $\det Df(x_0) \neq 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|g - f\|_\infty < \delta$ und $\|Dg - Df\|_\infty < \delta$ die Differentialgleichung $\dot{x} = g(x)$ einen Gleichgewichtspunkt in der ε–Umgebung von x_0 hat. *Hinweis:* Verwende den Satz über die inverse Funktion.