Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Störungstheorie dynamischer Systeme

Heinz Hanßmann

9. Übungsblatt Aachen, den 10.6.2008

Sommersemester 2008

17. Betrachte auf $\mathbb{T}^2$ den Poincaréschnitt $C := \{x_1 = 0\}$ sowie ein Vektorfeld X mit Fluß φ, für welches die zugehörige Poincaréabbildung die Form $R : x_2 \mapsto x_2 + \rho \pmod 1$ hat. Die Rückkehrzeit $\tau = \tau(x_2)$ wird im Allgemeinen nicht konstant sein. Konstruiere einen Poincaréschnitt

$$D \;=\; \left\{ \varphi_{t(x_2)}(0, x_2) \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{T} \right\}$$

für welchen die Rückkehrzeit konstant ist. *Hinweis:* Die Suche nach einer (periodischen) Zeitverschiebung $t = t(x_2)$ führt auf $\varphi_\tau(D) = (D)$ mit konstanter Zeit $\tau \in \mathbb{R}$, schreibe dies explizit als Gleichung in t und τ und formuliere Bedingungen an ρ, unter welchen eine Lösung existiert.

18. Sei

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) &= \omega + \mathcal{O}(y) \\ \dot{y} &= g(x,y) &= a(x) \cdot y + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ mit $a(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{T}^n$. Konstruiere eine Koordinatentransformation

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, \lambda(x) \cdot y) \end{array}$$

welche das Vektorfeld in Floquetform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega + \mathcal{O}(y) \\ \dot{y} &= \Omega y + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned}$$

überführt, mit $\Omega > 0$. Rechne dazu nach, daß dies auf die Gleichung

$$\Omega \;=\; a + \langle \omega \mid \nabla_x \lambda \rangle$$

führt. Gib die nötigen Bedingungen sowohl für eine formale Lösung als auch für eine reell-analytische Lösung an.