Opgaven voor herhaling v/d stof

1. Voor $m \in \mathbb{N}_+$ definieer op de verzameling $\mathbb{Z}$ van gehele getallen de volgende relatie:

$$k \sim l \quad :\Leftrightarrow \quad k - l \text{ is door } m \text{ deelbaar.}$$

   (i) Ga na dat dit een equivalentierelatie is.

   (ii) Hoeveel elementen heeft de verzameling

$$\mathbb{Z}_m \;\; := \;\; \mathbb{Z}/\!\sim \;\; = \;\; \{[k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

   van equivalentieklassen?

   (iii) Definieer een operatie op $\mathbb{Z}_m$ d.m.v. $[k] + [l] := [k + l]$. Ga na dat deze definitie niet van de gekozen representanten k en l afhangt en bepaal het element $\nu \in \mathbb{Z}_m$ met de eigenschap $[k] + \nu = [k]$ voor alle $[k] \in \mathbb{Z}_m$. Bereken verder voor elk element $[k] \in \mathbb{Z}_m$ de inverse t.o.v. deze operatie, d.w.z. een element $\kappa \in \mathbb{Z}_m$ met de eigenschap $[k]+\kappa = \nu$.

   (iv) Definieer een operatie op $\mathbb{Z}_m$ d.m.v. $[k] \cdot [l] := [k \cdot l]$. Ga na dat deze definitie niet van de gekozen representanten k en l afhangt en bepaal het element $\varepsilon \in \mathbb{Z}_m$ met de eigenschap $[k] \cdot \varepsilon = [k]$ voor alle $[k] \in \mathbb{Z}_m$. Bestaat er weer voor elk element $[k] \in \mathbb{Z}_m$ de inverse t.o.v. deze operatie, d.w.z. een element $\lambda \in \mathbb{Z}_m$ met de eigenschap $[k] \cdot \lambda = \varepsilon$? (Hint: stel eerst dat m een priemgetal is.)

2. Bewijs d.m.v. volledige inductie dat de functie $f(x) = x^n$ de afgeleide $f'(x) = nx^{n-1}$ heeft. Hiervoor mag je de productregel $(gh)' = g'h + gh'$ gebruiken.

3. In een kansspel op televisie mogen elke dag 6 uit 12 (gesloten) enveloppen door een gelukkige beller worden gekozen. De helft van de 12 enveloppen zijn leeg, de andere 6 bevatten elk 100 euro.

   (i) Bereken de kans om precies 300 euro te winnen.

   (ii) Gegeven dat de eerste 5 geopende enveloppen niet leeg zijn, hoe groot is de kans dat de laatste envelop eveneens 100 euro bevat?

Wie het maximum van 600 euro uit de enveloppen haalt kraakt de 'jackpot'. Dan wordt met 2 dobbelstenen geworpen en krijgt de speler bovenop nog 10.000 euro keer het aantal geworpen ogen.

(iii) Wat is de kans voor een beller om minstens 100.000 euro te winnen?

Wie de 6 lege enveloppen gekozen heeft krijgt een 'troostprijs' van 10.000 euro. Definieer $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ als de (totale) winst van de speler.

(iv) Laat zien dat de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ gelijk is aan $\mu = \frac{357200}{924} \approx 385$.

Voor de variantie $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$ geldt $\sigma = \frac{100}{231}\sqrt{29086559} \approx 2335$.

(v) Geef een ruwe schatting van de kans dat de televisieomroep binnen een jaar meer dan 300.000 euro aan prijzen moet uitkeren. (Neem aan dat 365 groot genoeg is om de centrale limietstelling toe te mogen passen.)

4. Op $\mathbb{R}$ definiëren we de functie

$$f(x) \quad := \quad \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\ .$$

(i) Ga na dat f een kansdichtheid op $\mathbb{R}$ is.

De zo gedefinieerde verdeling noemt men de Cauchy–verdeling en de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$ een Cauchy–verdeelde stochast.

(ii) Kun je de verwachtingswaarde $E(X)$ berekenen ?

Definieer voor gebeurtenissen $A \subseteq \mathbb{R}$ de voorwaardelijke kans

$$P(A|B) \quad = \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

waar $B = [-b, b]$ met $b > 0$. Dit definieerd voor vaste b een kansmaat op $\mathbb{R}$.

(iii) Bepaal de bijbehorende kansdichtheid en verdelingsfunctie.

Ook voor deze verdeling beschouwen we de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$.

(iv) Kun je hiervoor de verwachtingswaarde $E(X)$ berekenen ? Wat gebeurd als $b \to \infty$?