Tentamen Wiskunde voor a.i. 2 februari 2006

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Rinke Colen, Anske van Luijtelaar, Bouke van der Spoel of Wilco Moerman).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Zij I een indexverzameling en $(B_i)_{i\in I}$ een familie van deelverzamelingen $B_i \subseteq \Omega$ met de eigenschappen

$$\bigwedge_{i\neq j} B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{en} \quad \bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$$

Definieer een relatie op Ω d.m.v.

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_{i\in I} x \in B_i \text{ en } y \in B_i$$

(i) Laat zien dat deze relatie een equivalentierelatie is.

(ii) Bepaal de bijbehorende equivalentieklassen

(iii) Laat zien dat $\Omega/\!\sim$ niet meer elementen bevat dan I.

2. Definieer een rijtje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ van gehele getallen $a_n \in \mathbb{Z}$ d.m.v. $a_0 = 6$, $a_1 = 9$ en vervolgens recursief

$$a_{n+2} \;=\; a_n \;+\; a_{n+1} \;.$$

(i) Ga na dat $a_2 = 15$, $a_3 = 24$, $a_4 = 39$.

(ii) Bewijs: elk getal a_n is door 3 deelbaar.

3. Definieer de stochast X als volgt. Gooi een (eerlijke) dobbelsteen, als de waarde niet 6 is dan is dit ook de waarde van X. Indien de waarde 6 is wordt opnieuw gegooid (zo vaak tot de waarde niet 6 is, en dit is dan de waarde van X).

   (i) Stel een model op.

   (ii) Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

   (iii) Zijn de gebeurtenissen $A = \{\text{waarde van } X \text{ oneven}\}$ en $B = \{\text{waarde van } X \text{ is 1 of 2}\}$ onafhankelijk?

   (iv) Wij herhalen dit experiment 4 keer. Wat is de kans dat 3 minstens een van de 4 uitkomsten is?

4. Op $\mathbb{R}$ definiëren we voor vaste $\lambda > 0$ de functie

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases} .$$

   (i) Ga na dat f een kansdichtheid op $\mathbb{R}$ is.

   De zo gedefinieerde verdeling noemt men de exponentiële verdeling en de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$ een exponentieel verdeelde stochast.

   (ii) Bereken de verwachtingswaarde $E(X)$.

   Definieer voor gebeurtenissen $A \subseteq \mathbb{R}$ de voorwaardelijke kans

$$P(A|B) \quad = \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

   waar $B = [-b, b]$ met $b > 0$. Dit definieerd voor vaste b een kansmaat op $\mathbb{R}$.

   (iii) Bepaal de bijbehorende kansdichtheid en verdelingsfunctie.

   Ook voor deze verdeling beschouwen we de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$.

   (iv) Bereken hiervoor de verwachtingswaarde $E(X)$. Wat gebeurd als $b \to \infty$?