Tentamen Wat is wiskunde? 3 november 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je collegeleider: Johan van de Leur (groep 1), Bas Janssens (groep 2), Thijs Ruijgrok (groep 3), Jan van Zweeden (groep 4), Heinz Hanßmann (groep 5) of Ralph Klaasse (groep 6).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Notaties: $A\backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$ (in het boek $A - B$),
  $A \subsetneq B$ als $A \subseteq B$ en $A \neq B$ (in het boek $A \subset B$).
- Alle 6 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) Geef de waarheidstabel van de volgende uitspraak:
   $(((\sim P) \vee (\sim Q)) \Longrightarrow R) \vee ((Q \Longrightarrow P) \Longleftrightarrow R)$.

   (b) Bewijs de volgende bewering voor willekeurige verzamelingen A, B, C:
   $A\backslash A \cap B \cap C \;=\; A\backslash B \;\cup\; A\backslash C$.

   Voor de notatie $A\backslash B$ zie boven.

2. Bewijs dat de functie $g : \mathbb{R}\backslash\{5\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\}$ gedefinieerd door

$$g(x) \;=\; \frac{3x}{x-5}$$

   bijectief is.

3. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeven door $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ en $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Bereken a_3 en a_4.

   (b) Bewijs met het sterke principe van volledige inductie dat $a_n = 3^{n-1} + (-1)^{n-1}$ voor alle $n \geq 2$.

4. Bewijs dat de relatie

$$R \;=\; \left\{ ((i,j),(k,l)) \in \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_4^2 \quad : \quad i + j = k + l \right\}$$

   een equivalentie-relatie is op $\mathbb{Z}_4^2 = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Bepaal het aantal equivalentie-klassen en beschrijf alle verschillende equivalentie-klassen. Toon aan dat dit alle equivalentie-klassen zijn en dat ze allemaal verschillend zijn.

5. Toon m.b.v. de ε-δ definitie aan dat de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) \;=\; |x|(x+1)^2$$

   differentieerbaar is in $x = -1$. (N.B.: je mag hier geen rekenregels voor limieten of afgeleides gebruiken).

6. Geef een collectie van intervallen $I_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ met de volgende drie eigenschappen.

$$\begin{aligned} (1) \;&:\; I_n \subsetneq I_m \quad \text{als } n > m, \\ (2) \;&:\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \;=\; \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{en} \\ (3) \;&:\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \;=\; \emptyset\ . \end{aligned}$$

   Bewijs ieder van deze eigenschappen voor de door jou gekozen intervallen.