

Tentamen Infinitesimaalrekening A

5 januari 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Vermeld eventueel een emailadres waar je de (voorlopige) uitslag wil ontvangen.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Elke opgave telt voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

Opgave 1. a. Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die strikt monotoon dalend is en injectief maar niet surjectief. Bijvoorbeeld $f(x) = -\arctan x$ of $f(x) = e^{-x}$.

b. Bestaat er een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die injectief is en niet surjectief en niet strikt monotoon? Als je denkt dat zo'n functie bestaat, geef dan een voorbeeld (d.w.z. een functievoorschrift, een plaatje is niet voldoende); als zo'n functie niet kan bestaan laat zien waarom niet. Een voorbeeld van zo'n functie is f gedefinieerd door $f(x) = \arctan x$ als $x \neq 0.9$ en $f(0.9) = 23$. Dan is $f(0.9) > 0 = f(0)$ en ook $f(0.9) > f(1) = \frac{\pi}{4}$.

Opgave 2.

We bekijken voor $x > 1$, $f(x) = \frac{\sin(x^2 - 1)}{\log x}$ en $g(x) = 2x + x \cos(x^3)$.

Onderzoek $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Als de limieten bestaan, toon aan dat ze bestaan en bepaal de waarden. Als een of beide niet bestaan, leg uit waarom niet.

De limieten bestaan allebei. Er geldt voor alle $x > 1$ $-\frac{1}{\log x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\log x}$ en verder $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$ dus $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$ en daarom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\log x} = 0$ dus met de insluitstelling $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Omdat $g(x) \geq x$ voor alle $x > 1$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ geldt $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Opgave 3. Primitiveer de functies $f(x) = (x + 1) \sin(x^2 + 2x + 3)$. en $g(x) = x^2 \sin(2x + 1)$. Controleer je antwoorden.

We substitueren bijvoorbeeld $y = x^2 + 2x + 3$, dan is $dy/dx = 2(x + 1)$ en dus $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 2x + 3)$.

g doen we door twee keer partiël te integreren.:

$$\int x^2 \sin(2x + 1) dx = -x^2 \frac{1}{2} \cos(2x + 1) + \int 2x \frac{1}{2} \cos(2x + 1) dx = -\frac{x^2}{2} \cos(2x + 1) + 2x \frac{1}{4} \sin(2x + 1) - \int \frac{2}{4} \sin(2x + 1) dx = (\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}) \cos(2x + 1) + \frac{x}{2} \sin(2x + 1).$$

Opgave 4.

De tweede-orde Taylorveelterm van $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ in het steunpunt 1 is $1 + \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{-3}{4} (x - 1)^2$ De restterm heeft de gedaante $\frac{1}{3!} (x - 1)^3 \frac{1}{4} \frac{-3}{4} \frac{-7}{4} t^{-\frac{11}{4}}$ voor een t tussen 1 en x .

We vinden hiermee de volgende benadering van $\sqrt[4]{1,1} \approx 1 + 1/40 - (3/32)(1/100) (= 1.02406\dots)$

De absolute waarde van de fout in deze benadering is

$$\frac{1}{3!} (x - 1)^3 \frac{1}{4} \frac{-3}{4} \frac{-7}{4} t^{-\frac{11}{4}}$$

voor $x - 1 = \frac{1}{10}$. Voor elke t tussen 1 en x is $|t^{-\frac{11}{4}}| \leq 1$

dus de absolute fout is minder dan

$$\frac{1}{10^3} \cdot \frac{21}{6 \cdot 4^3} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{7}{128} < \frac{1}{10^4}.$$

(de vierdemachtwortel van 1,1 is 1,0241136\dots)

Opgave 5. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 + (4i - 3)z = 1 + 7i$. Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$. Controleer de antwoorden.

Door toepassing van de formule voor oplossing van kwadratische vergelijkingen vinden we

$$z = \frac{1}{2} \cdot (-(4i - 3) \pm \sqrt{(4i - 3)^2 + 4(1 + 7i)}) = \frac{1}{2} \cdot (-(4i - 3) \pm \sqrt{-3 + 4i}).$$

Stel $-3 + 4i = (a + bi)^2$ met a, b reëel, dan vinden we $a^2 - b^2 = -3$ en $2abi = 4i$ dus $ab = 2$ en hieruit (of door het opstellen van vergelijkingen) de oplossingen $a = 1, b = 2$ of $a = -1, b = -2$,

En hieruit $z = \frac{1}{2} \cdot (-(4i - 3) \pm (1 + 2i))$, zodat

$$z = 2 - i \text{ en } z = 1 - 3i.$$

Opgave 6. Bepaal alle differentieerbare functies $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zodat $xf'(x)f(x) - 1 = x$ voor alle $x > 1$.

Stel $f(x) = y$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ dan kunnen we de differentiaalvergelijking omschrijven tot

$$y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} \text{ en hieruit door scheiden van variabelen}$$

$$\int y dy = \int 1 + \frac{1}{x} dx \text{ dus } \frac{1}{2}y^2 = x + \log x + k \text{ voor een constante } k.$$

Er moet gelden $k \geq -1$ omdat anders $x + \log x + k$ negatieve waarden kan krijgen voor x iets groter dan 1.

De gevraagde functies zijn $f(x) = \sqrt{2x + 2 \log x + 2k}$ en $f(x) = -\sqrt{2x + 2 \log x + 2k}$ voor een constante $k \geq -1$. Controle laat zien dat dit inderdaad functies zijn met de gevraagde eigenschap.

Opgave 7. Bepaal een twee keer differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking $f''(x) + 4f'(x) + 13f(x) = 13x - 9$ en waarvoor geldt $f(0) = 0$ en $f'(0) = 0$.

Om de oplossingen van de homogene vergelijking $h''(x) + 4h'(x) + 13h(x) = 0$ te vinden lossen we op $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ waaruit we de wortels $\lambda = -2 \pm 3i$ vinden, en de algemene oplossing $h(x) = pe^{-2x} \cos 3x + qe^{-2x} \sin 3x$, met p en q reële constanten.

We proberen de particuliere oplossing $f(x) = ax + b$ en vinden $4a + 13ax + 13b = 13x - 9$ voor alle x , we vinden $a = 1$ en $b = -1$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus

$$f(x) = pe^{-2x} \cos 3x + qe^{-2x} \sin 3x + x - 1. \text{ Invullen van } f(0) = 0 \text{ levert } p = 1. \text{ Verder geldt } f'(0) = -2pe^0 \cos 0 + (\dots) \sin 0 + qe^0 \cdot 3 \cos 0 + 1 = 0$$

dus $-2p + 3q + 1 = 0$ dus $q = \frac{1}{3}$.

De gevraagde functie is dus $f(x) = e^{-2x} \cos 3x + \frac{1}{3}e^{-2x} \sin 3x + x - 1$.

Opgave 8. Bepaal $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$. Beargumenteer waarom je antwoord correct is.

Deze limiet kun je doen met de regel van l'Hôpital (het kan ook met Taylor)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} \sqrt[4]{x} - \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x}}{\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} - \frac{d}{dx} \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$