TENTAMEN WIS 212
Analyse in Meer Variabelen

9 juli 2003   14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *Zet* **NIET** *meer vraagstukken tegelijk op één blad, want de vraagstukken worden afzonderlijk nagekeken door verschillende correctoren.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1 (Cayley's oppervlak). Het kubisch oppervlak V in $\mathbf{R}^3$ zij gegeven als de nulpuntsverzameling van de functie $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ met $g(x) = x_2^3 - x_1x_2 - x_3$.

(i) Bewijs dat g een submersie is en dat V een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is.

(ii) Definieer

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{door} \qquad \phi(y) = (y_1, y_2, y_2^3 - y_1y_2).$$

Bewijs dat ϕ een C^∞ parametrisatie van V door $\mathbf{R}^2$ is, d.w.z., toon aan dat ϕ een injectieve C^∞ immersie met $\phi(\mathbf{R}^2) = V$ is die een continue inverse gedefinieerd op V heeft.

Laat $\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de loodrechte projectie zijn met $\pi(x) = (x_1, 0, x_3)$; en defineer $\Xi = \pi \circ \phi$ met

$$\Xi : \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2 \times \{0\} \to \mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^2, \qquad \Xi(x_1, x_2, 0) = (x_1, 0, x_2^3 - x_1x_2).$$

(iii) Bewijs dat de verzameling $S \subset \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ bestaande uit de singuliere punten voor Ξ (d.w.z., de punten x waar $\det D\Xi(x) = 0$) gelijk is aan de parabool $\{\, (x_1, x_2, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = 3x_2^2 \,\}$.

(iv) Bewijs dat $\Xi(S) \subset \mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}$ gelijk is aan de *semikubische parabool*

$$\{\, (x_1, 0, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 4x_1^3 = 27x_3^2 \,\}.$$

ZIE OMMEZIJDE   ZIE OMMEZIJDE   ZIE OMMEZIJDE

Exercise 0.2 (Extrema op ellips). De verzameling E is gedefinieerd als de doorsnijding van het vlak V met de cylinder C, waarbij

$$V = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \,\}, \qquad C = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \,\}.$$

(i) Bewijs dat P_1 en P_2 de punten van E zijn die het dichtst bij de oorsprong liggen, terwijl P_3 het punt van E is dat het verst van de oorsprong ligt, indien

$$P_1 = (1,0,0), \qquad P_2 = (0,1,0), \qquad P_3 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \Big).$$

(ii) Bereken de raakruimten $T_{P_1}V$, $T_{P_1}C$ en $T_{P_1}E$, en toon aan dat $T_{P_1}V \cap T_{P_1}C = T_{P_1}E$.

(iii) Bepaal een lineaire afbeelding $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ zodanig dat $T_{P_1}E$ optreedt als beeld daaronder.

Exercise 0.3 (Catenoïde). We definiëren $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$ en verder

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{door} \qquad \phi(s,t) = (\cosh s \cos t,\, \cosh s \sin t,\, s),$$

en we beschouwen het oppervlak $C = \mathrm{im}(\phi)$, waarvan zonder bewijs mag worden gebruikt dat het een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is. (Zeepvliezen tussen twee concentrische parallelle cirkels hebben dikwijls de vorm van een deel van dit oppervlak.) Zij $a \in \mathbf{R}_+$ vast gekozen.

Voor gebruik in dit vraagstuk herinneren we aan de formules

$$\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s}), \quad \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1, \quad \cosh^2 s + \sinh^2 s = \cosh 2s, \quad 2\cosh s \sinh s = \sinh 2s.$$

(i) Bewijs dat de lengte van de spiraalvormige kromme $K_a = \{\, \phi(s,s) \mid |s| \le a \,\}$ op C gelijk is aan $2\sqrt{2}\sinh a$.

(ii) Bewijs dat de oppervlakte van de deelverzameling C_a van C bestaande uit de $x \in C$ met $|x_3| < a$ gelijk is aan $2\pi(a + \cosh a \sinh a)$.

Zij $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ de begrensde open deelverzameling begrensd door C_a en de twee schijven

$$D_a^{\pm} = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \cosh^2 a,\, x_3 = \pm a \,\}.$$

(iii) Bewijs dat $\mathrm{vol}_3(\Omega) = \pi(a + \cosh a \sinh a)$ met behulp van 3-dimensionale integratie.

(iv) Pas de Divergentiestelling van Gauss toe met Ω en het vectorveld $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $f(x) = (x_1, x_2, 0)$, en toon aan dat zodoende het resultaat uit onderdeel (iii) volgt.

Exercise 0.4 (**Orthogonaliteit van sferisch harmonische functies van verschillende graad).** Voor gebruik in dit vraagstuk herinneren we aan de tweede identiteit van Green

$$\int_{\Omega}(f\,\Delta g - g\,\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\Big(f\,\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)(y)\,d_{n-1}y,$$

alsmede aan Euler's identiteit, die geldig is voor een functie f homogeen van de graad m:

$$Df(x)(x) = \langle x, \operatorname{grad} f(x)\,\rangle = m\,f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}).$$

Zij nu $l \in \mathbf{N}_0$ en zij $\mathscr{H}_l$ de lineaire ruimte over $\mathbf{R}$ bestaande uit de harmonische polynomen op $\mathbf{R}^n$ die homogeen van de graad l zijn. Beschouw $p_l \in \mathscr{H}_l$ en $p_m \in \mathscr{H}_m$ met $l,\, m \in \mathbf{N}_0$. Zij $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\,\}$. Bewijs

$$\int_{S^{n-1}}\Big(p_l\,\frac{\partial p_m}{\partial \nu} - p_m\,\frac{\partial p_l}{\partial \nu}\Big)(y)\,d_{n-1}y = 0.$$

Bewijs nu

$$\frac{\partial p_m}{\partial \nu}(y) = \langle\,\operatorname{grad} p_m(y), y\,\rangle = m\,p_m(y) \qquad (y \in S^{n-1}),$$

en concludeer

$$\int_{S^{n-1}} p_l(y)p_m(y)\,d_{n-1}y = 0 \qquad (l, m \in \mathbf{N}_0,\, l \neq m).$$