TENTAMEN WIS 212B
Analyse in Meer Variabelen
7 aug 2003

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*

Exercise 0.1. Maak Exercise 7.21.(i)–(v) uit de Vraagstukkencollectie en toon onderdeel (iv) ook aan met behulp van de Divergentiestelling van Gauss.

Exercise 0.2. Zij $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ een continue functie met begrensde drager. Defineer

$$g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \qquad \text{door} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy.$$

(i) Toon aan dat g goedgedefinieerd is en dat g continu is.

(ii) Bewijs dat $\int_{\mathbf{R}_+} g(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}_+} f(y)\,dy$.

Hieronder betekent $\exp y = e^y$. Merk op dat $x\log x - x$ een primitieve van $\log x$ is.

(iii) Geef bij elke onderstaande gelijkheid of ongelijkheid aan waarom deze waar is.

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(y)\,dy\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log(yf(y))\,dy - \log x + 1\right)\\ &= \frac{e}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log(yf(y))\,dy\right)\end{aligned}$$

Uit de geometrische-arithmetische ongelijkheid leidt men de volgende *ongelijkheid van Jensen* af, geldig voor continue $f : [a,b] \to \mathbf{R}$:

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx.$$

Dit resultaat mag in het onderstaande zonder bewijs worden gebruikt.

(iv) Bewijs nu met behulp van (iii) en (ii) de volgende *ongelijkheid van Carleman*:

$$\int_{\mathbf{R}_+} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(y)\,dy\right) dx \le e\int_{\mathbf{R}_+} f(x)\,dx.$$

ZIE OMMEZIJDE **ZIE OMMEZIJDE** **ZIE OMMEZIJDE**

Exercise 0.3 (Catenoïde). We definiëren $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$ en verder

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{door} \qquad \phi(s,t) = (\cosh s \cos t,\, \cosh s \sin t,\, s),$$

en we beschouwen het oppervlak $C = \mathrm{im}(\phi)$, waarvan zonder bewijs mag worden gebruikt dat het een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is. (Zeepvliezen tussen twee concentrische parallelle cirkels hebben dikwijls de vorm van een deel van dit oppervlak.) Zij $a \in \mathbf{R}_+$ vast gekozen.

Voor gebruik in dit vraagstuk herinneren we aan de formules

$$\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s}), \quad \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1, \quad \cosh^2 s + \sinh^2 s = \cosh 2s, \quad 2\cosh s \sinh s = \sinh 2s.$$

(i) Bewijs dat de lengte van de spiraalvormige kromme $K_a = \{\, \phi(s,s) \mid |s| \le a \,\}$ op C gelijk is aan $2\sqrt{2}\sinh a$.

(ii) Bewijs dat de oppervlakte van de deelverzameling C_a van C bestaande uit de $x \in C$ met $|x_3| < a$ gelijk is aan $2\pi(a + \cosh a \sinh a)$.

Zij $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ de begrensde open deelverzameling begrensd door C_a en de twee schijven

$$D_a^{\pm} = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \cosh^2 a,\, x_3 = \pm a \,\}.$$

(iii) Bewijs dat $\mathrm{vol}_3(\Omega) = \pi(a + \cosh a \sinh a)$ met behulp van 3-dimensionale integratie.

(iv) Pas de Divergentiestelling van Gauss toe met Ω en het vectorveld $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $f(x) = (x_1, x_2, 0)$, en toon aan dat zodoende het resultaat uit onderdeel (iii) volgt.

Exercise 0.4 (**Orthogonaliteit van sferisch harmonische functies van verschillende graad).** Voor gebruik in dit vraagstuk herinneren we aan de tweede identiteit van Green

$$\int_{\Omega}(f\,\Delta g - g\,\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\Big(f\,\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)(y)\,d_{n-1}y,$$

alsmede aan Euler's identiteit, die geldig is voor een functie f homogeen van de graad m:

$$Df(x)(x) = \langle x, \operatorname{grad} f(x)\rangle = m\,f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}).$$

Zij nu $l \in \mathbf{N}_0$ en zij $\mathscr{H}_l$ de lineaire ruimte over $\mathbf{R}$ bestaande uit de harmonische polynomen op $\mathbf{R}^n$ die homogeen van de graad l zijn. Beschouw $p_l \in \mathscr{H}_l$ en $p_m \in \mathscr{H}_m$ met $l, m \in \mathbf{N}_0$. Zij $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\,\}$. Bewijs

$$\int_{S^{n-1}}\Big(p_l\,\frac{\partial p_m}{\partial \nu} - p_m\,\frac{\partial p_l}{\partial \nu}\Big)(y)\,d_{n-1}y = 0.$$

Bewijs nu

$$\frac{\partial p_m}{\partial \nu}(y) = \langle \operatorname{grad} p_m(y), y\rangle = m\,p_m(y) \qquad (y \in S^{n-1}),$$

en concludeer

$$\int_{S^{n-1}} p_l(y)p_m(y)\,d_{n-1}y = 0 \qquad (l, m \in \mathbf{N}_0,\ l \neq m).$$