TENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

25-08-2004 14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1 (Oppervlakte van n-hoek). Zij $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ de begrensde open verzameling begrensd door de n-hoek met de opeenvolgende hoekpunten $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbf{R}^2$ doorlopen tegen de wijzers van de klok in. Indien we met de bovenindices cyclisch modulo n rekenen, hebben we

$$(\star) \qquad \text{oppervlakte}(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le k \le n} \big(x_1^{(k+1)} + x_1^{(k)}\big)\big(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\big).$$

(i) Bewijs $(\star)$ door toepassing van de Integraalstelling van Green op Ω en het vectorveld $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ met $f(x) = (0, x_1)$.

(ii) Concludeer door het schrijven van de n-hoek als een vereniging van n driehoeken dat geldt

$$\sum_{1 \le k \le n} \big(x_1^{(k+1)} + x_1^{(k)}\big)\big(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\big) = \sum_{1 \le k \le n} \big(x_1^{(k)} x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} x_2^{(k)}\big).$$

Bewijs deze identiteit ook middels herschrijving van het linkerlid.

Exercise 0.2 (Lambert's cylindrische projectie). Beschouw in $\mathbf{R}^3$ de sfeer S^2, de deelverzameling S van S^2, en de cylinder C^2, gegeven door respectievelijk

$$S^2 = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| = 1 \}, \qquad S = S^2 \setminus \{\pm(0,0,1)\}, \qquad C^2 = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \ |x_3| < 1 \}.$$

Introduceer *Lambert's cylindrische projectie* $f : S \to C^2$ als volgt. Bij gegeven $x \in S$, zij ℓ_x de unieke lijn in $\mathbf{R}^3$ door x die parallel aan het vlak $\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0 \}$ is en die de x_3-as snijdt. Definieer nu $f(x)$ als dat snijpunt van ℓ_x met C^2 dat de kortste afstand tot x heeft.

(i) Bewijs dat de afbeelding f een bijectie is die wordt gegeven door

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3 \right).$$

Geef een formule voor de inverse $f^{-1} : C^2 \to S$.

Zij nu V een deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 die bevat is in S.

(ii) Verifieer dat $f(V)$ een deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 die bevat is in C^2 en toon aan dat V en $f(V)$ dezelfde oppervlakte hebben.

Definieer

$$\psi : \,]-\pi, \pi[\, \times \,]-1, 1[\, \to C^2 \qquad \text{door} \qquad \psi(\alpha, x_3) = (\cos\alpha, \sin\alpha, x_3).$$

(iii) Bewijs dat ψ een inbedding is met een open dichte deelverzameling C van C^2 als beeld.

Zij de *ontrolling*

$$g : C \to \,]-\pi, \pi[\, \times \,]-1, 1[\, \subset \mathbf{R}^2$$

gedefinieerd als de inverse van ψ.

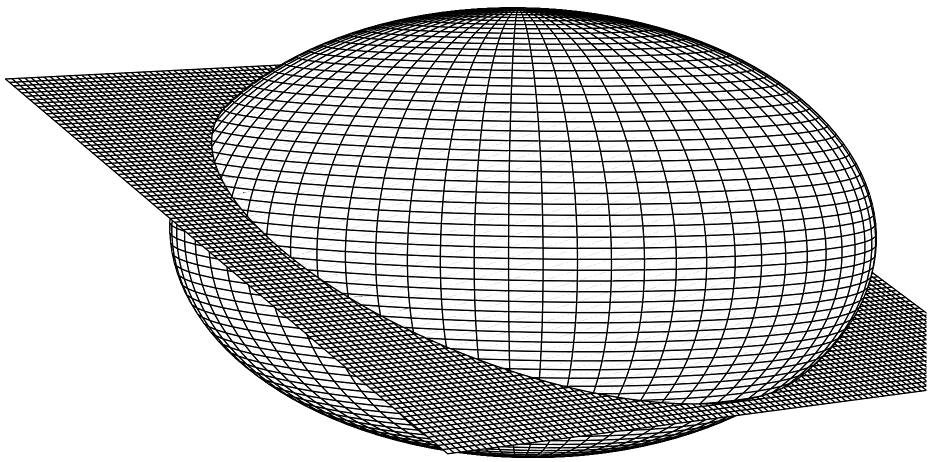
(iv) Toon aan dat W en de ontrolling $g(W)$ dezelfde oppervlakte hebben, voor elke deelvariëteit W in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 die bevat is in C.

(v) Beschouw nu het speciale geval dat $V \subset S^2$ een *sferische tweehoek* met hoek α is, d.w.z., V is de deelverzameling van S^2 begrensd door twee halve grootcirkels in S^2 wier raakvectoren in een snijpunt een hoek ter grootte α vormen (in andere woorden, een schil van een partje van een sinaasappel). Bewijs m.b.v. de onderdelen (ii) en (iv) dat de oppervlakte van V gelijk is aan 2α. Concludeer dat de oppervlakte van S^2 gegeven wordt door 4π.

Exercise 0.3 (Korte en lange as van ellips). Veronderstel dat $a \in \mathbf{R}^3$ en $p \in \mathbf{R}^3$ voldoen aan $0 < a_1 < a_2 < a_3$ en $p_1 p_2 p_3 \neq 0$. Dan zijn

$$E := \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \sum_{1 \le j \le 3} a_j x_j^2 = 1 \,\} \qquad \text{en} \qquad P := \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \langle p, x \rangle = 0 \,\}$$

een ellipsoïde en een plat vlak in $\mathbf{R}^3$, respectievelijk. Zonder bewijs mag men gebruiken dat de doorsnijding $V := E \cap P$ een ellips is.



Definieer verder $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ door $f(x) = \|x\|^2$.

(i) Laat zien dat de beperking $f|_V$ van f tot V haar extrema aanneemt en dat deze positief zijn.

(ii) Zij m een extremum van $f|_V$. Toon aan dat $ma_j \neq 1$, voor $1 \le j \le 3$. Bewijs dat de extrema m van $f|_V$ voldoen aan de kwadratische (verdrijf de noemers om dat in te zien) vergelijking

$$\sum_{1 \le j \le 3} \frac{p_j^2}{ma_j - 1} = 0.$$

Met andere worden, de wortels van deze vergelijking geven de lengte van de korte en de lange halve as van de ellips V.
Hint: Gebruik de multiplicatorenmethode van Lagrange en neem het inproduct van de resulterende vergelijking met $x \in \mathbf{R}^3$. Men vindt dat één van de multiplicatoren gelijk is aan m. Bewijs uit het ongerijmde dat de andere multiplicator ongelijk 0 is, en bepaal vervolgens vergelijkingen voor de coördinaten van een punt x waar een extremum wordt aangenomen.

Achtergrond. Wanneer we met de indices cyclisch modulo 3 rekenen, blijkt de vergelijking voor m als volgt te zijn:

$$m^2 \sum_{1 \le j \le 3} p_j^2 a_{j+1} a_{j+2} - m \sum_{1 \le j \le 3} p_j^2 (a_{j+1} + a_{j+2}) + \|p\|^2 = 0.$$

Solution of Exercise 0.1

(i) We have $\operatorname{curl} f(x) = 1$, for all $x \in \mathbf{R}^2$, hence Green's Integral Theorem 8.3.5 implies

$$\text{oppervlakte}(\Omega) = \int_\Omega \operatorname{curl} f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle\, f(y), d_1 y\,\rangle = \sum_{1\le k\le n} \int_{\partial\Omega_k} \langle\, f(y), d_1 y\,\rangle,$$

$$\text{where} \qquad \partial\Omega_k = \{\, y^{(k)}(t) := x^{(k)} + t(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le t \le 1\,\}.$$

As a consequence,

$$f \circ y^{(k)}(t) = \big(0, x_1^{(k)} + t(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})\big), \qquad Dy^{(k)}(t) = x^{(k+1)} - x^{(k)},$$

$$\langle\, f \circ y^{(k)}(t), Dy^{(k)}(t)\,\rangle = (x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)})\big(x_1^{(k)} + t(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})\big),$$

$$\int_{\partial\Omega_k} \langle\, f(y), d_1 y\,\rangle = (x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) \int_0^1 \big(x_1^{(k)} + t(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})\big)\,dt$$

$$= \big(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\big)\Big(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})\Big) = \frac{1}{2}\big(x_1^{(k+1)} + x_1^{(k)}\big)\big(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\big).$$

(ii) Write Ω as a union of n triangles with vertices 0, $x_1^{(k)}$ and $x_1^{(k+1)}$, for $1 \le k \le n$. Next, note that the area of such a triangle equals half the area of the parallelogram spanned by the vectors $x_1^{(k)}$ and $x_1^{(k+1)}$, where the latter area is given by

$$\begin{vmatrix} x_1^{(k)} & x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k)} & x_2^{(k+1)} \end{vmatrix} = x_1^{(k)} x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} x_2^{(k)}.$$

For another proof of the identity in part (ii), expand the products at its left–hand side and observe that

$$\sum_{1\le k\le n} x_1^{(k+1)} x_2^{(k+1)} - \sum_{1\le k\le n} x_1^{(k)} x_2^{(k)} = 0.$$

Solution of Exercise 0.2

(i) Suppose $x \in S$, then $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 \ne 0$. Furthermore, $\ell_x = \{\, (\lambda x_1, \lambda x_2, x_3) \mid \lambda \in \mathbf{R}\,\}$. Now

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, x_3) \in C^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

The point of intersection of ℓ_x with C^2 closest to x is obtained by taking the plus sign. This proves the formula for f. Furthermore, given arbitrary $y \in C^2$, an element $x \in S$ such that $f(x) = y$ has to satisfy

$$x_3 = y_3, \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{1 - x_3^2} = \sqrt{1 - y_3^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad x_j = y_j \sqrt{1 - y_3^2},$$

for $1 \le j \le 2$. Indeed, such an x belongs to S, in view of

$$\|x\|^2 = (y_1^2 + y_2^2)(1 - y_3^2) + y_3^2 = 1.$$

As a consequence, $x \in S$ exists and is uniquely determined. This establishes the bijectivity of f and also that

$$f^{-1}(y) = (y_1\sqrt{1 - y_3^2},\, y_2\sqrt{1 - y_3^2},\, y_3).$$

(ii) As is well-known, up to subsets of negligible area, two-dimensional submanifolds V contained in S are of the form $V = \phi(D)$, with $\phi : D \to S^2$ given by

$$D \subset \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{and} \qquad \phi(\alpha, \theta) = (\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta).$$

Note that we may take D to be open and that ϕ is an embedding. As in Example 7.4.6 we see

$$\text{oppervlakte}(V) = \int_D \cos\theta \, d\alpha d\theta.$$

On account of f and f^{-1} being a differentiable bijections (on suitable open subsets of $\mathbf{R}^3$) we see that $\widetilde{\phi} = f \circ \phi : D \to C^2$ is an embedding, which is given by

$$\widetilde{\phi}(\alpha, \theta) = (\cos\alpha, \sin\alpha, \sin\theta).$$

$f(V) = \widetilde{\phi}(D)$ is a submanifold in $\mathbf{R}^3$ of dimension 2 that is contained in C^2 because of Corollary 4.3.2. Furthermore,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\alpha}(\alpha, \theta) &= (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0), & \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\theta}(\alpha, \theta) &= (0, 0, \cos\theta), \\ \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\theta}(\alpha, \theta) &= \cos\theta(\cos\alpha, \sin\alpha, 0), & \left\| \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\theta}(\alpha,\, \theta) \right\| &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Therefore $f(V) = \widetilde{\phi}(D)$ implies

$$\text{oppervlakte}\,(f(V)) = \int_D \cos\theta \, d\alpha d\theta.$$

(iii) The assertion is a direct consequence of Exercise 3.6 on cylindrical coordinates.

(iv) If $W \subset C^2$, then $W = \psi(D)$, for some D as in part (ii), while

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\alpha, x_3) &= (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0), & \frac{\partial\psi}{\partial x_3}(\alpha, x_3) &= (0, 0, 1), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\psi}{\partial x_3}(\alpha, x_3) &= (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), & \left\| \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\psi}{\partial x_3}(\alpha, x_3) \right\| &= 1, \end{aligned}$$

This and the fact that $g(W) = D$ now yield

$$\text{oppervlakte}(W) = \int_D d\alpha dx_3 = \text{oppervlakte}\,(g(W)).$$

(v) We may assume that the great circles intersect at the poles of S^2, since this can be achieved by applying a rotation of $\mathbf{R}^3$, which is area-preserving. Now the image $f(V)$ is a curved rectangle on C^2 of width α and height 2. Next unroll S^2 on the plane $\mathbf{R}^2$, in other words, apply g. Then the curved rectangle will be mapped to a genuine rectangle in $\mathbf{R}^2$ of width α and height 2. Application of parts (ii) and (iv) now yields that the area of V equals 2α. In particular, S^2 is the spherical diangle of angle 2π, which implies that its area is 4π.

Solution of Exercise 0.3

(i) The assertion follows from that fact that $f|_V$ is a continuous function on the compact set V. Furthermore, E consists of more points than the origin alone.

(ii) The method of Lagrange multipliers gives that $f|_V$ is extremal at points $x \in V$ for which there exist $\lambda \in \mathbf{R}^2$ satisfying

$$(*) \qquad 2x_j = 2\lambda_1 a_j x_j + \lambda_2 p_j \qquad (1 \le j \le 3).$$

Taking the inner product with x we obtain

$$2\|x\|^2 = 2\lambda_1 \sum_{1\le j\le 3} a_j x_j^2 + \lambda_2\langle p, x\rangle = 2\lambda_1, \qquad \text{hence} \qquad m = \|x\|^2 = \lambda_1.$$

Consider first the case of $\lambda_2 = 0$. Then $(*)$ implies

$$x_j(1 - ma_j) = 0 \qquad (1 \le j \le 3).$$

If two of the coordinates of x are equal to 0, then the condition $x \in P$ forces the third coordinate to be 0, but then $x \notin E$. Consequently two of these coordinates differ from 0, which implies $0 = 1 - ma_i = 1 - ma_j$, for $i \neq j$; that is, $a_i = a_j$, a contradiction. Hence $\lambda_2 \neq 0$. If $ma_j - 1 = 0$, for some j, then $(*)$ implies $\lambda_2 p_j = 0$; and thus $p_j = 0$, a contradiction. Furthermore, we obtain from $(*)$

$$x_j = \frac{\lambda_2}{2}\frac{p_j}{1 - ma_j} \qquad (1 \le j \le 3).$$

But now $x \in P$ gives

$$\frac{\lambda_2}{2}\sum_{1\le j\le 3}\frac{p_j^2}{1 - ma_j} = 0, \qquad \text{and so} \qquad \sum_{1\le j\le 3}\frac{p_j^2}{ma_j - 1} = 0.$$