EERSTE DEELTENTAMEN ANALYSE C

10 november 1990 9.30–12.30 uur

- *Zet uw naam op elk blad dat u inlevert en uw naam en adres op de enveloppe.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen.*
- *De gewichten van de vraagstukken zijn:* **45:15:40**.

Exercise 1. Zij $0 \le y < \sqrt{2}$. Dan heeft de verticale lijn in $\mathbf{R}^2$ gaande door het punt $(2 - y^2,\, 0)$ een uniek snijpunt, zeg $\chi(y) \in \mathbf{R}^2$, met de cirkelboog:

$$\{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x - (1,\, 0)\| = 1,\, x_2 \ge 0 \,\};$$

en er geldt $\chi(y) \ne (0,\, 0)$. De rechte lijn door $(0,\, 0)$ en $\chi(y)$ snijdt de verticale lijn gaande door $(y^2,\, 0)$ in een uniek punt, zeg $\phi(y) \in \mathbf{R}^2$. (Maak een schets!)

(i) Verifieer dat geldt:

$$\phi(y) = \left(y^2,\, \frac{y^3}{\sqrt{2 - y^2}} \right) \qquad (0 \le y < \sqrt{2}).$$

(ii) Laat zien dat de afbeelding $\phi : \left]\, 0,\, \sqrt{2}\, \right[\to \mathbf{R}^2$ gegeven door $y \mapsto \phi(y)$ een C^∞-inbedding is.

De *cissoïde van Diokles* is de verzameling $V \subset \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door:

$$V = \left\{ \left(y^2,\, \frac{y^3}{\sqrt{2 - y^2}} \right) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; -\sqrt{2} < y < \sqrt{2} \right\}.$$

(iii) Toon aan dat $V \setminus \{(0,0)\}$ een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.

(iv) Bewijs:

$$V = g^{-1}(\{0\}), \quad \text{met} \quad g(x) = x_1^3 + (x_1 - 2)x_2^2.$$

(v) Laat zien dat $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ surjectief is, en dat, voor elke $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, de niveauverzameling $g^{-1}(\{c\})$ een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.

(vi) Bewijs dat V een gewone spits heeft in het punt $(0,0)$, en leidt hieruit af dat V in $(0,0)$ geen C^1-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.

Exercise 2. Zij $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een symmetrische lineaire afbeelding, en zij $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de kwadratische functie:

$$f(x) = < Ax,\, x > \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

(i) Bewijs dat voor alle $x \in \mathbf{R}^n$ geldt:

$$\operatorname{grad} f(x) = 2A\,x.$$

(ii) Bewijs dat de extremale waarden van de restrictie van f tot de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^n$, gelijk zijn aan een eigenwaarde van A.
Aanwijzing: Denk eraan dat een continue functie op een begrensde en gesloten verzameling zijn maximum en minimum aanneemt.

Exercise 3. Definieer $f : [\,0,\,\infty\,[\, \times U \to \mathbf{R}$ door:

$$U = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0,\, x_2 > 0 \,\},$$

en:

$$f(y;\, x) = y^2 - y(x_1^2 + x_2^2 + 1) + x_1^2 \quad (y \in [\,0,\,\infty\,[\,,\, x \in U).$$

(i) Bewijs m.b.v. de Tussenwaardestelling dat, voor elke $x \in U$, er getallen $y_1 = y_1(x)$ en $y_2 = y_2(x)$ in $\mathbf{R}$ bestaan zó, dat:

$$f(y_1;\, x) = f(y_2;\, x) = 0, \quad \text{en} \quad 0 < y_1 < 1 < y_2.$$

Definieer, in de notatie van onderdeel (i), nu $\Phi : U \to V$ door:

$$V = \{\, (y_1,\, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y_1 < 1 < y_2 \,\}, \quad \Phi(x) = (y_1(x),\, y_2(x)).$$

(ii) Toon aan dat $\Phi : U \to V$ een bijectieve afbeelding is, door te bewijzen dat voor elke $y \in V$ de vergelijking $\Phi(x) = y$ een unieke oplossing $x = \Psi(y) \in U$ heeft, en dat geldt:

$$\Psi(y_1,\, y_2) = \big(\sqrt{y_1 y_2},\, \sqrt{(1 - y_1)(y_2 - 1)}\big).$$

Aanwijzing: Beschouw de kwadratische polynoomfunctie $y \mapsto (y - y_1)(y - y_2)$, bij gegeven $(y_1,\, y_2) \in \mathbf{R}^2$.

(iii) Bewijs dat $\Psi : V \to U$ een C^∞-afbeelding is. Ga na dat geldt, als $\Psi(y_1,\, y_2) = x$:

$$\det D\Psi(y) = \frac{y_2 - y_1}{4x_1x_2}.$$

Leid hieruit af dat zowel $\Psi : V \to U$ als $\Phi : U \to V$ een C^∞-diffeomorfisme is.

Voor elke $y \in I = \{\, y \in \mathbf{R} \mid y > 0,\, y \neq 1 \,\}$ introduceren we nu $g_y : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, resp. $V_y \subset \mathbf{R}^2$, door:

$$g_y(x) = \frac{x_1^2}{y} + \frac{x_2^2}{y - 1} - 1, \quad \text{resp.} \quad V_y = g_y^{-1}(\{0\}).$$

Merk op dat V_y een hyperbool, resp. een ellips, is, voor $0 < y < 1$, resp. $1 < y$.

(iv) Ga na:

$$x \in V_y \iff f(y;\, x) = 0.$$

(v) Bewijs m.b.v. onderdeel (ii) dat elke $x \in U$ op precies één hyperbool en ook op precies één ellips uit de collectie $\{\, V_y \mid y \in I \,\}$ ligt. En omgekeerd, dat voor elke $(y_1,\, y_2) \in V$ de hyperbool V_{y_1} en de ellips V_{y_2} precies één snijpunt, n.l. $x = \Psi(y_1,\, y_2)$, in U hebben.

(vi) Bewijs, voor $x = \Psi(y_1,\, y_2) \in U$, dat de hyperbool V_{y_1} en de ellips V_{y_2} in het punt x loodrecht op elkaar staan.

Achtergrond. De laatstgenoemde eigenschap in (v) is opmerkelijk, en hangt samen met het feit dat alle kegelsneden V_y hetzelfde brandpunt of focus hebben. Het element $(y_1,\, y_2) = (y_1(x),\, y_2(x)) \in V$ bestaat uit de *confocale coördinaten* voor het punt $x \in U$.

Uitwerking van Eerste Deeltentamen Analyse C van 10 november 1990.

De onderstaande uitwerkingen zijn langer dan het werk dat studenten redelijkerwijs gedurende een tentamen kunnen produceren. Dat komt doordat geen gebruik is gemaakt van telegramstijl, etc., maar ook omdat volledigheidshalve is ingegaan op details die bij de beoordeling van het ingeleverde werk gewoonlijk niet aan de orde kwamen. Om de beoordeling 10 te behalen, kon men gemeenlijk volstaan met werk met minder kwaliteit dan men hier zal aantreffen.

Uitwerking 1.

(i) Een punt x op de verticale lijn $\{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = 2 - y^2 \,\}$ is van de gedaante $x = (2 - y^2, \cdots)$. Verder is een punt x op de cirkelboog te schrijven als $x = (1 + w,\ \sqrt{1 - w^2})$ voor een geschikt gekozen $w \in \mathbf{R}$ met $|w| \le 1$. In een snijpunt geldt: $w = 1 - y^2$; en daarom is een snijpunt uniek, en wordt het gegeven door:

$$\chi(y) = \Big(2 - y^2,\ y\sqrt{2 - y^2}\Big) \quad (0 \le y < \sqrt{2}).$$

Voor $0 \le y < \sqrt{2}$ geldt $\chi(y) \ne (0, 0)$. De rechte lijn door $(0, 0)$ en $\chi(y)$ heeft een parametervoorstelling $\{\, t\,\chi(y) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R} \,\}$. Deze lijn snijdt de verticale lijn $\{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = y^2 \,\}$ in precies één punt; noem dat punt $\phi(y)$. In $\phi(y)$ geldt $t(2 - y^2,\ \cdots) = (y^2,\ \cdots)$. Derhalve hebben we:

$$t = \frac{y^2}{2 - y^2}; \quad \text{dus} \quad \phi(y) = \left(y^2,\ \frac{y^3}{\sqrt{2 - y^2}}\right).$$

Dit bewijst onderdeel (i).

(ii) De functie $\sqrt{\ }\ : [\,0,\ \infty[\ \to \mathbf{R}$ is continu, en een C^∞-functie op het open interval $]\,0,\ \infty\,[$. Voor $y \in\ ]\,0,\ \sqrt{2}\,[$ is $2 - y^2 > 0$, en dus is $y \mapsto \sqrt{2 - y^2}$ aldaar een C^∞-afbeelding. Derhalve is $y \mapsto \phi(y)$ een C^∞-afbeelding als compositie van dergelijke afbeeldingen. Door te letten op de eerste component y^2 van $\phi(y)$ en omdat $y > 0$, zien we dat ϕ injectief is. Voorts geldt:

$$D\phi(y) = \begin{pmatrix} 2y \\ * \end{pmatrix} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2;$$

en het is duidelijk dat deze afbeelding injectief is. Tenslotte is de afbeelding $\phi(y) \mapsto y$ de compositie van de continue afbeeldingen:

$$\phi(y) \mapsto \phi_1(y) = y^2 \quad \text{en} \quad y^2 \mapsto y;$$

en bijgevolg is deze afbeelding continu. Derhalve is:

$$\phi^{-1}|_{\phi(\,]\,0,\,\sqrt{2}\,[\,)} : \phi(\,]\,0,\ \sqrt{2}\,[\,) \to\ ]\,0,\ \sqrt{2}\,[$$

continu. Aan alle eisen voor een C^∞-inbedding is nu voldaan door $\phi :\ ]\,0,\ \sqrt{2}\,[\ \to \mathbf{R}^2$.

(iii) M.b.v. Corollarium 4.3.2 volgt uit onderdeel (ii) dat $\phi(\,]\,0,\ \sqrt{2}\,[\,)$ een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is; en dus is $V \setminus \{(0, 0)\}$ dat ook, omdat deze verzameling de disjuncte vereniging is van $\phi(\,]\,0,\ \sqrt{2}\,[\,)$ en de gespiegelde van $\phi(\,]\,0,\ \sqrt{2}\,[\,)$ t.o.v. de x_1-as.

(iv) Voor $x \in V$, geldt $x_1 = y^2$ en $x_2 = \dfrac{y^3}{\sqrt{2 - y^2}}$. Er volgt $x_2^2 = \dfrac{y^6}{2 - y^2} = \dfrac{x_1^3}{2 - x_1}$. Dus $(2 - x_1)x_2^2 = x_1^3$; ofwel $g(x) = 0$. Stel nu omgekeerd dat $g(x) = 0$; dan geldt dus $(2 - x_1)x_2^2 =$

x_1^3. Allereerst volgt hieruit $0 \leq x_1$ (want $0 > x_1$ impliceert $x_1 > 2$, en dus $0 > 2$, een tegenspraak), en op analoge wijze volgt $x_1 < 2$. Dus kunnen we schrijven $x_1 = y^2$ waarbij $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$. Verder geldt dan $x_2 = \pm\sqrt{\dfrac{x_1^3}{2-x_1}} = \dfrac{y^3}{\sqrt{2-y^2}}$, m.a.w. $x \in V$.

(v) Er geldt: $g(x_1, 0) = x_1^3$; en $x_1 \mapsto x_1^3$ is een surjectie van $\mathbf{R}$ op $\mathbf{R}$. Derhalve volgt dat $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ surjectief is. Verder hebben we:

$$Dg(x) = (3x_1^2 + x_2^2,\, 2(x_1 - 2)x_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R};$$

en dus is $Dg(x)$ surjectief tenzij:

$$3x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad \text{en} \quad 2(x_1 - 2)x_2 = 0.$$

Hieraan wordt alleen voldaan door $x_1 = x_2 = 0$; en er geldt $g(0, 0) = 0$. Voor alle $x \in \mathbf{R}^2$ met $g(x) = c \neq 0$, is dus g een submersie in x; en m.b.v. de Submersiestelling volgt dat $g^{-1}(\{c\})$ een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.

(vi) We hebben:

$$\frac{1}{\sqrt{2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{1}{2}y^2\Big)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathcal{O}(y)), \quad y \to 0;$$

en dus vinden we:

$$\phi(y) = (y^2,\, \frac{1}{\sqrt{2}}y^3 + \mathcal{O}(y^4)), \quad y \to 0.$$

De beweringen uit onderdeel (vi) volgen nu m.b.v. Lemma 5.3.10.

Uitwerking 2.

(i) Vanwege de symmetrie van A geldt, voor $x, h \in \mathbf{R}^n$:

$$f(x+h) - f(x) = < A(x+h),\, x+h > - < Ax,\, x > =$$
$$= < Ah,\, x > + < Ax,\, h > + < Ah,\, h > = 2 < Ax,\, h > + < Ah,\, h > .$$

M.b.v. de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz volgt:

$$| < Ah,\, h > | \leq \|Ah\|\, \|h\| \leq \|A\|_{\text{Eucl.}} \|h\|^2.$$

Op grond van de definitie van afgeleide hebben we, voor alle $x, h \in \mathbf{R}^n$:

$$< \operatorname{grad} f(x),\, h > = Df(x)(h) = < 2Ax,\, h >;$$

en dit bewijst onderdeel (i).

(ii) We zoeken extrema van $x \mapsto f(x)$ onder de nevenconditie:

$$x \in S^{n-1} = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) := < x, x > -1 = 0 \,\}.$$

Passen we onderdeel (i) toe met $A = I$, dan volgt dat $\operatorname{grad} g(x) = 2x$. Overeenkomstig de Aanwijzing heeft f beperkt tot S^{n-1}, een maximum en een minimum; zeg dat zo een extremum wordt aangenomen in $x^0 \in S^{n-1}$. Krachtens de multiplicatorenmethode van Lagrange bestaat dan $\lambda \in \mathbf{R}$ zó, dat:

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \lambda \operatorname{grad} g(x^0).$$

D.w.z.:

$$2Ax^0 = \lambda\, 2x^0, \quad \text{en} \quad < x^0,\, x^0 > = 1.$$

Bijgevolg is x^0 een eigenvector voor A en λ de bijbehorende eigenwaarde. Maar dan geldt:

$$f(x^0) = < Ax^0,\, x^0 > = < \lambda x^0,\, x^0 > = \lambda.$$

Uitwerking 3.

(i) Omdat $x_1 > 0$ en $x_2 > 0$, voor elke $x \in U$, geldt:

$$f(0;\, x) = x_1^2 > 0; \quad f(1;\, x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - 1 + x_1^2 = -x_2^2 < 0; \quad f(x_1^2 + x_2^2 + 1;\, x) = x_1^2 > 0.$$

Toepassing van de Tussenwaardestelling op de continue functie $y \mapsto f(y;\, x)$ op de intervallen $[\,0,\, 1\,]$, en $[\,1,\, 1 + x_1^2 + x_2^2\,]$ resp., geeft dat er getallen $y_1 = y_1(x)$, en $y_2 = y_2(x)$ resp., bestaan zó, dat:

$$f(y_1(x);\, x) = 0, \quad 0 < y_1(x) < 1; \qquad f(y_2(x);\, x) = 0, \quad 1 < y_2(x).$$

(ii) Vanwege de definities is Φ een afbeelding van U naar V. Om de surjectiviteit van Φ te bewijzen is het nodig om bij gegeven $(y_1, y_2) \in V$ een element $x \in U$ te vinden zó, dat y_1 en y_2 wortels zijn van het kwadratische polynoom $f(y;\, x)$. Anderzijds zijn y_1 en y_2 wortels van het monische polynoom:

$$(y - y_1)(y - y_2) = y^2 - y(y_1 + y_2) + y_1 y_2.$$

Coëfficiëntvergelijking geeft dus:

$$y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 + 1, \qquad y_1 y_2 = x_1^2.$$

D.w.z.:

$$x_2^2 = y_1 + y_2 - x_1^2 - 1 = -y_1 y_2 + y_1 + y_2 - 1 = (1 - y_1)(y_2 - 1).$$

Er bestaan dus oplossingen $x_1 > 0$ en $x_2 > 0$, n.l.:

$$x_1 = \sqrt{y_1 y_2}, \quad x_2 = \sqrt{(1 - y_1)(y_2 - 1)};$$

en bovendien zijn dit de enig mogelijke. Dus $\Phi : U \to V$ is bijectief, met de gegeven $\Psi : V \to U$ als de inverse.

(iii) De functie $\sqrt{\ } : [\,0, \infty\,[\, \to \mathbf{R}$ is continu, en een C^∞-functie op het open interval $]\,0, \infty\,[$. Omdat $y_1 y_2 > 0$ en $(1 - y_1)(y_2 - 1) > 0$, voor $y \in V$, is Ψ een C^∞-afbeelding. Er geldt:

$$2D\Psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{y_2}{\sqrt{y_1 y_2}} & \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1 y_2}} \\ -\dfrac{y_2 - 1}{\sqrt{(1 - y_1)(y_2 - 1)}} & \dfrac{1 - y_1}{\sqrt{(1 - y_1)(y_2 - 1)}} \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$4 \det D\Psi(y_1, y_2) = \frac{y_2(1 - y_1) + y_1(y_2 - 1)}{\sqrt{y_1 y_2 (1 - y_1)(y_2 - 1)}} = \frac{y_2 - y_1 y_2 + y_1 y_2 - y_1}{\sqrt{y_1 y_2}\sqrt{(1 - y_1)(y_2 - 1)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 x_2}.$$

Hieruit volgt $\det D\Psi(y_1, y_2) > 0$, en dus impliceert de Globale Inverse-functiestelling dat $\Psi : V \to U$ een C^∞-diffeomorfisme is. Maar dan is $\Phi : U \to V$ het ook.

(iv) Er geldt: $y(y - 1) g_y(x) = -f(y;\, x)$, terwijl $y(y - 1) \neq 0$, voor $y \in I$.

(v) Voor gegeven $x \in U$ bestaat volgens onderdeel (ii) een uniek element $(y_1, y_2) \in V$ zó, dat:

$$0 < y_1 < 1, \quad g_{y_1}(x) = 0; \qquad 1 < y_2, \quad g_{y_2}(x) = 0.$$

D.w.z.:

$$x \in V_{y_1} \text{ met } V_{y_1} \text{ hyperbool}; \qquad x \in V_{y_2} \text{ met } V_{y_2} \text{ ellips}.$$

Anderzijds volgt ook uit (ii) dat bij gegeven $(y_1, y_2) \in V$ er een unieke $x = \Psi(y_1, y_2) \in U$ bestaat zó, dat:

$$g_{y_1}(x) = 0 \text{ en } g_{y_2}(x) = 0.$$

D.w.z.:

$$V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap U = \{x\}.$$

(vi) Er geldt:

$$\operatorname{grad} g_{y_j}(x) = 2\left(\frac{x_1}{y_j}, \frac{x_2}{y_j - 1}\right) \qquad (j = 1, 2).$$

Dus volgt m.b.v. (ii) dat:

$$\frac{1}{4} < \operatorname{grad} g_{y_1}(x), \operatorname{grad} g_{y_2}(x) >= \frac{x_1^2}{y_1 y_2} + \frac{x_2^2}{(y_1 - 1)(y_2 - 1)} = 1 - 1 = 0.$$

De bewering volgt nu omdat $T_x V_{y_j} = (< \operatorname{grad} g_{y_j}(x) >)^{\perp}$.