TENTAMEN ANALYSE C

26 februari 1991 13.30–16.30 uur

- *Zet op elk blad dat u inlevert uw naam, en op de eerste bladzijde de naam van uw practicumleider.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen.*

Exercise 0.1. Een *limaçon van Pascal* is een kromme $L \subset \mathbf{R}^2$ die als volgt wordt geconstrueerd. Zij $C \subset \mathbf{R}^2$ de eenheidscirkel om 0 en zij $A \in \mathbf{R}^2$ een willekeurig gekozen punt. Een punt $x \in \mathbf{R}^2$ behoort tot de verzameling L dan en slechts dan als de rechte lijn gaande door A en x, loodrecht staat op een rechte lijn die gaat door x en die raakt aan C.

(i) Neem aan dat $A = (0, a)$, met $a \geq 0$. Bewijs dat dan geldt:
$L = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + M_a$, met $M_a = \mathrm{Im}(\varphi_a)$, waarbij :
$\varphi_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ en $\varphi_a(\theta) = (1 - a\sin\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

(ii) Bewijs dat voor elke $a \neq 1$ en elke $\theta \in \mathbf{R}$ er een open omgeving D_θ van θ in $\mathbf{R}$ bestaat zó, dat $\varphi_a(D_\theta)$ een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.

(iii) Nu beschouwen we alleen waarden van a met $0 \leq a \leq 1$. Merk op dat in poolcoördinaten (ρ, θ) voor $\mathbf{R}^2$, de kromme M_a nu wordt gegeven door de vergelijking $\rho = 1 - a\sin\theta$. Bewijs:

$$M_a \cup \{0\} = N_a, \quad \text{met} \quad N_a = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid g_a(x) = 0\},$$

$$\text{waarbij :} \quad g_a(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Laat met behulp hiervan zien, dat M_a een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is, voor alle a met $0 \leq a < 1$; en dat M_1 voor alle $x \in M_1 \backslash \{0\}$ een C^∞-deelvariëteit in x is.

(iv) Tenslotte, veronderstel $a > 1$. Bewijs dat M_a geen C^∞-deelvariëteit in het punt 0 is indien $a > 1$. Aanwijzing : Beschouw de raaklijn aan $\varphi_a(D_\theta)$ (uit onderdeel ii) voor $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{a}\right)$ en $\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{a}\right)$.

Exercise 0.2. Zij Δ^n de open verzameling in $\mathbf{R}^n$ gegeven door:

$$\Delta^n = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0, \text{ voor } 1 \leq i \leq n, \; x_1 + \cdots + x_n < 1 \,\}.$$

(i) Bewijs dat $\Psi : \,]\,0, 1\,[^n \to \Delta^n$ een C^∞-diffeomorfisme is, indien $\Psi(y) = x$ waarbij:

$$x = (y_1\, y_2\, y_3 \cdots y_{n-1}\, y_n,\; (1 - y_1)\, y_2\, y_3 \cdots y_{n-1}\, y_n,\; \cdots,\; (1 - y_{n-2})\, y_{n-1}\, y_n,\; (1 - y_{n-1})\, y_n).$$

Aanwijzing: Voor $x \in \Delta^n$ geldt $y_i \in \,]\,0, 1\,[$, voor $1 \leq i \leq n$, als:

$$\begin{array}{lcl} y_n & = & x_1 + \cdots \qquad \cdots + x_n \\ y_{n-1}\, y_n & = & x_1 + \cdots \qquad \cdots + x_{n-1} \\ y_{n-2}\, y_{n-1}\, y_n & = & x_1 + \cdots \qquad \cdots + x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1\, y_2 \cdots \quad \cdots y_{n-1}\, y_n & = & x_1. \end{array}$$

(ii) Bewijs:

$$\det D\Psi(y) = y_2\, y_3^2\, \cdots y_{n-1}^{n-2}\, y_n^{n-1} \qquad (y \in \,]\,0,\,1\,[^n).$$

Aanwijzing: Tel bij elke rij in $D\Psi(y)$ steeds al de voorgaande rijen op.

Het *standaard* $(n-1)$-*simplex* Σ^{n-1} in $\mathbf{R}^n$ wordt gedefinieerd door:

$$\Sigma^{n-1} = \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 + \cdots + y_n = 1,\ y_i \geq 0,\ \text{voor } 1 \leq i \leq n \,\}.$$

(iii) Ga na dat uit onderdeel (i) volgt dat de afbeelding:

$$\phi : \,]\,0,\,1\,[^{n-1} \to \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 + \cdots + y_n = 1,\ y_i > 0,\ \text{voor } 1 \leq i \leq n \,\}$$

een C^∞-inbedding is, indien:

$$\phi(y) = (y_1\, y_2\, y_3\, \cdots y_{n-1},\ (1-y_1)\, y_2\, y_3\, \cdots y_{n-1},\ \cdots,\ (1-y_{n-2})\, y_{n-1},\ (1-y_{n-1})).$$

(iv) Merk op dat $e := \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$ een eenheidsvector in $\mathbf{R}^n$ is die in elk punt van Σ^{n-1} loodrecht staat op Σ^{n-1}. Ga na dat geldt:

$$\omega_\phi(y) = \omega_\phi(y_1,\, \ldots, y_{n-1}) = \det(D\phi(y) \mid e) = \sqrt{n}\, y_2\, y_3^2\, \cdots y_{n-1}^{n-2} \qquad (y \in \,]\,0,\,1\,[^{n-1}),$$

waarbij ω de Euclidische $(n-1)$-dimensionale dichtheid op Σ^{n-1} is.

(v) Ga na dat, in de notatie van onderdeel (ii),

$$\det D\Psi(y_1,\, \ldots, y_{n-1},\, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, y_n^{n-1} \omega_\phi(y_1,\, \ldots, y_{n-1}).$$

Zij

$$\mathbf{R}^n_+ = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0,\ \text{voor } 1 \leq i \leq n \,\}.$$

(vi) Concludeer dat geldt, voor elke $f \in C_c(\mathbf{R}^n_+)$,

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty c^{n-1} \left(\int_{\Sigma^{n-1}} f(cy)\, \omega(y)\, dy \right) dc =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\Sigma^{n-1}} \left(\int_0^\infty c^{n-1} f(cy)\, dc \right) \omega(y)\, dy.$$

(vii) Ga na dat de formule uit onderdeel (vi) ook van toepassing is op de functie:

$$f(x) = e^{-(x_1 + \cdots + x_n)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n_+).$$

Concludeer dat de volgende formule onmiddellijk volgt:

$$\text{hyperarea}_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}.$$