TENTAMEN ANALYSE C

2 maart 1991 9.30–12.30 uur

- *Zet op elk blad dat u inlevert uw naam, en op de eerste bladzijde de naam van uw practicumleider.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen.*
- *De gewichten van de vraagstukken zijn*: **10:45:45**.

Exercise 0.1. Onderstel dat $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ een C^1-functie is, en definieer:

$$\Psi(r,\,\alpha) = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha), \quad \text{voor} \quad (r,\,\alpha) \in \,]\,0,\,\infty\,] \times \,]-\pi,\,\pi\,[\,; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Bewijs nu dat geldt, als $0 \neq x = \Psi(r,\,\alpha) \in \mathbf{R}^2$:

$$\frac{1}{x_1 + i\,x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)(x) = \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial(f\circ\Psi)}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial(f\circ\Psi)}{\partial\alpha}\Big)(r,\,\alpha).$$

Aanwijzing: Er geldt: $D\Psi(r,\,\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\dfrac{1}{r}\sin\alpha & \dfrac{1}{r}\cos\alpha \end{pmatrix}.$

Exercise 0.2. [**Astroïde**]. Dit is de kromme $A \subset \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door:

$$A = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1 \,\}.$$

(i) Bewijs: $\quad x \in A \iff 1 - x_1^2 - x_2^2 = 3(\sqrt[3]{x_1x_2})^2$;

en concludeer dat $\|x\| \leq 1$, als $x \in A$.

(ii) Bewijs dat $A \setminus \{\,(-1,0)\,\} = \operatorname{im}\phi$, waarbij:

$$\phi : \,]-\pi,\,\pi\,[\, \to \mathbf{R}^2 \quad \text{met} \quad \phi(t) = (\cos^3 t,\, \sin^3 t).$$

Definieer:

$$D = \,]-\pi,\,\pi\,[\, \setminus \{\, -\frac{\pi}{2},\, 0,\, \frac{\pi}{2} \,\} \subset \mathbf{R}, \qquad S = \{\,(1,0),\,(0,1),\,(0,-1),\,(-1,0)\,\} \subset A.$$

(iii) Ga na dat $\phi : D \to \mathbf{R}^2$ een C^∞-inbedding is. Toon aan dat A een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is, behalve in de punten van S.

(iv) Ga na dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan A in $\phi(t)$ gelijk is aan $-\tan t$, als $t \in D$. Concludeer nu met onderdeel (i) dat A in de punten van S een spits heeft. Maak een schets van A.

(v) Verifieer dat de lengte van A gelijk is aan 6.

(vi) Bereken de oppervlakte van de begrensde verzameling in $\mathbf{R}^2$ begrensd door A.

Exercise 0.3. Zij Δ^n de open verzameling in $\mathbf{R}^n$ gegeven door:

$$\Delta^n = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0,\ \text{voor } 1 \le i \le n,\ x_1 + \cdots + x_n < 1 \,\}.$$

(i) Bewijs dat $\Psi :]\,0,\,1\,[^n \to \Delta^n$ een C^∞-diffeomorfisme is, indien $\Psi(y) = x$ waarbij:

$$x = (y_1\, y_2\, y_3 \cdots y_{n-1}\, y_n,\ (1-y_1)\, y_2\, y_3 \cdots y_{n-1}\, y_n,\ \cdots,\ (1-y_{n-2})\, y_{n-1}\, y_n,\ (1-y_{n-1})\, y_n).$$

Aanwijzing: Voor $x \in \Delta^n$ geldt $y_i \in]\,0,\,1\,[$, voor $1 \le i \le n$, als:

$$\begin{array}{lcl}
y_n & = & x_1 + \cdots \qquad\qquad \cdots + x_n \\
y_{n-1}\, y_n & = & x_1 + \cdots \qquad\quad \cdots + x_{n-1} \\
y_{n-2}\, y_{n-1}\, y_n & = & x_1 + \cdots \qquad \cdots + x_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
y_1\, y_2 \cdots \quad \cdots y_{n-1}\, y_n & = & x_1.
\end{array}$$

(ii) Bewijs:

$$\det D\Psi(y) = y_2\, y_3^2 \cdots y_{n-1}^{n-2}\, y_n^{n-1} \qquad (y \in]\,0,\,1\,[^n).$$

Aanwijzing: Tel bij elke rij in $D\Psi(y)$ steeds al de voorgaande rijen op.

Definieer $\mathbf{R}^n_+ = \{\, p \in \mathbf{R}^n \mid p_i > 0,\ \text{voor } 1 \le i \le n \,\}$.

(iii) Bewijs nu de volgende formule:

$$\int_{\Delta^n} x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1}\, dx = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)} \qquad (p \in \mathbf{R}^n_+).$$

Aanwijzing: Hierbij herinneren we aan de bekende formules, geldig voor $p > 0$, $q > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{p-1}\, dt = \Gamma(p), \qquad p\,\Gamma(p) = \Gamma(p+1), \qquad \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

(iv) Concludeer i.h.b. dat: $\quad \mathrm{vol}_n(\Delta^n) = \dfrac{1}{n!}$.

Tenslotte wordt het hyperoppervlak Σ^{n-1} in $\mathbf{R}^n$ gedefinieerd door:

$$\Sigma^{n-1} = \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid y_i > 0,\ \text{voor } 1 \le i \le n,\ y_1 + \cdots + y_n = 1 \,\}.$$

Veronderstel nu dat $p \in \mathbf{R}^n_+$ voldoet aan $p_i > 1$, voor $1 \le i \le n$.

(v) Ga na dat $\Sigma^{n-1} \subset \partial\Delta^n$, en dat de functie $y \mapsto y_1^{p_1-1} \cdots y_n^{p_n-1}$ verdwijnt in die punten van $\partial\Delta^n$ die niet tot Σ^{n-1} behoren.

(vi) Bewijs nu m.b.v. Stelling 6.7.1 de volgende formule:

$$\int_{\Sigma^{n-1}} y_1^{p_1-1} \cdots y_n^{p_n-1} \omega(y)\, dy = \sqrt{n}\, \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}.$$

(vii) Ga na dat i.h.b. volgt: $\quad \mathrm{hyperarea}_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = \dfrac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.