TWEEDE DEELTENTAMEN ANALYSE CW
Dinsdag 4 januari 1994
9:30-12:30 uur

- *Zet op elk vel uw naam en op het eerste vel tevens de naam van uw practicumleider en het aantal ingeleverde blaadjes.*
- *U mag de onderdelen van de opgaven in elke gewenste volgorde maken.*

1. [**Ongelijkheid van Poincaré**]. Zij $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ een C^1-functie met begrensde drager.

   (i) Bewijs dat voor $i = 1, \ldots, n$ geldt:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)^2 \, dx = -2 \int_{\mathbf{R}^n} x_i \, f(x) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, dx.$$

   Veronderstel dat g, $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continue functies met begrensde drager zijn. Dan geldt de volgende ongelijkheid (Cauchy-Schwarz):

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} g(x)h(x) \, dx \right| \leq \Big(\int_{\mathbf{R}^n} g(x)^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} h(x)^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

   (ii) Leidt uit (i) en deze ongelijkheid af:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)^2 \, dx \leq 2 \Big(\int_{\mathbf{R}^n} (x_i \, f(x))^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big)^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

   Zij nu de drager van f bevat in de verzameling $[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$ (n keer) $= [-1, 1]^n$.

   (iii) Bewijs dat de volgende *ongelijkheid van Poincaré* geldt voor f:

$$\int_{[-1,1]^n} f(x)^2 \, dx \leq \frac{4}{n} \int_{[-1,1]^n} \|\text{grad } f(x)\|^2 \, dx.$$

2. [**Hypocycloïde van Steiner**]. Zij $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, resp. de hypocycloïde van Steiner $H \subset \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door:

$$\phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \phi_1(\alpha) \\ \phi_2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha + \cos 2\alpha \\ 2\sin\alpha - \sin 2\alpha \end{pmatrix}, \qquad H = \text{Im}\,(\phi).$$

   We herinneren u aan de volgende somregels voor goniometrische functies:

$$\begin{aligned} \cos(p+q) &= \cos p \cos q - \sin p \sin q \\ \sin(p+q) &= \cos p \sin q + \cos q \sin p. \end{aligned}$$

   (i) Bewijs dat de lengte van H gelijk is aan 16. Hint: Druk de integrand uit in $\sin(\frac{3}{2}\alpha)$.

   Zij Ω de begrensde verzameling in $\mathbf{R}^2$ begrensd door H.

(ii) Bewijs dat

$$\mathrm{opp}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi_1(\alpha)\frac{d\phi_2}{d\alpha}(\alpha) - \phi_2(\alpha)\frac{d\phi_1}{d\alpha}(\alpha)\,d\alpha.$$

(iii) Bewijs dat Ω een oppervlakte heeft gelijk aan 2π.

3. Zij $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ en $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ de open verzameling gedefinieerd door:

$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < x_1,\ -1 < x_3 < 1,\ 0 < x_2 < x_1 \mathrm{tg}\,\psi,\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 1\}.$

(i) Bewijs dat $\mathrm{vol}_3(\Omega) = \frac{4}{3}\,\psi$.

Zij $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ het vectorveld

$$f(x) = (2x_1x_2 - 2x_1e^{x_2},\ \mathrm{arctg}\,(x_1 + x_3) - x_2^2,\ x_3 + 2x_3e^{x_2}).$$

(ii) Bereken: $\int_{\partial\Omega}\langle f(y), \nu(y)\rangle\omega(y)\,dy$.

4. [**Maximumprincipe voor harmonische functies**]. Zij $U \subset \mathbf{R}^n$ open en $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ harmonisch op U (dwz $\Delta\,f(x) = 0$ voor alle $x \in U$). Zij $x_0 \in U$ en $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ zo, dat $B(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \subset U$. $S(x_0, r) = \partial B(x_0, r)$.

(i) Bewijs dat

$$\int_{S(x_0,r)} \frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\omega(y)\,dy = 0.$$

(Zie (6.70) op blz. 186 voor de definitie van $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$).

Zij g de functie op $\mathbf{R}^n \setminus \{x_0\}$ gedefinieerd door:

$$\begin{cases} g(x) = -\frac{1}{n-2}\|x - x_0\|^{-n+2} & \text{als } n > 2. \\ g(x) = \log\|x - x_0\| & \text{als } n = 2. \end{cases}$$

(ii) Bewijs dat g harmonisch is op $\mathbf{R}^n \setminus \{x_0\}$, bepaal $\dfrac{\partial g}{\partial \nu}(y)$ voor $y \in S(x_0, r)$ en toon aan dat geldt:

$$\int_{S(x_0,r)} f(y)\frac{\partial g}{\partial \nu}(y)\omega(y)\,dy = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{S(x_0,r)} f(y)\omega(y)\,dy.$$

U mag hierbij gebruik maken van de resultaten uit voorbeeld 6.8.5 op blz. 185.

De *middelwaarde van f op de sfeer* $S(x_0, r)$ is als volgt gedefinieerd:

$$M_r(f, x_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S(x_0, r))}\int_{S(x_0,r)} f(y)\omega(y)\,dy.$$

Voor $R \geq r$ definieren we $B(x_0, R, r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid r \leq \|x - x_0\| \leq R\}$. Er geldt dat

$$\int_{S(x_0,R)} f(y)\omega(y)\,dy - \int_{S(x_0,r)} f(y)\omega(y)\,dy = \int_{\partial B(x_0,R,r)} f(y)\omega(y)\,dy.$$

(iii) Toon met behulp van het voorafgaande aan dat de middelwaarde $M_r(f, x_0)$ niet van r afhangt en (door een limietovergang $r \to 0$) dat deze waarde gelijk is aan $f(x_0)$.

Het volgende onderdeel formuleert het Maximumprincipe. Het maken hiervan is facultatief en levert een bonus op indien uw bewijs correct is.

(iv) Bewijs dat f op iedere gesloten deelverzameling $A \subset U$ haar maximum in een punt van ∂A aanneemt.