EERSTE DEELTENTAMEN ANALYSE C

5 november 1994 9.30–12.30 uur

- *Zet uw naam op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen.*
- *De vraagstukken wegen even zwaar*

Exercise 0.1. Ter inleiding een eenvoudig geval. Definieer $f_\pm : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ door $f_\pm(x) = x_1^2 \pm x_2^2$, en zij $V = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 \,\}$.

(i) Bewijs door expliciete berekening dat $f_+|_V$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ een absoluut minimum ter waarde $\frac{1}{2}$ heeft, terwijl $f_-|_V$ een functie zonder extrema is.

We generaliseren het voorgaande. Onderstel $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ met $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, en zij $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{R})$ de diagonaalmatrix met coëfficiënten $a_1, \dots, a_n$ op de hoofddiagonaal. Zij $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \langle Ax, x \rangle$. Stel $V = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, p \rangle = 1 \,\}$ waarbij $0 \neq p \in \mathbf{R}^n$.

(ii) Bewijs dat extrema van $f|_V$ alleen kunnen voorkomen in $x^0 = \dfrac{1}{\langle A^{-1}p, p \rangle} A^{-1}p$.

(iii) Bewijs dat $f|_V$ een absoluut minimum ter waarde $\frac{1}{\langle A^{-1}p,p \rangle}$ heeft in x^0. Ga hiertoe na dat voor alle $x^0 + h \in V$ geldt

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \langle \operatorname{grad} f(x^0), h \rangle + f(h) = f(x^0) + f(h).$$

Exercise 0.2. Definieer $V \subset \mathbf{R}^3$, en $\Psi : V \to \mathbf{R}^3$ door

$$V = \,]\,0, \infty\,[\, \times \,]\,{-\pi}, \pi\,[\, \times \mathbf{R}, \qquad \Psi(r, \alpha, \tau) = \Big(r\frac{\cos\alpha}{\cosh\tau}, r\frac{\sin\alpha}{\cosh\tau}, r\tanh\tau \Big).$$

In het onderstaande mag u gebruiken dat geldt

$$\cosh' = \sinh, \qquad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} > 0, \qquad \frac{1}{\cosh^2} + \tanh^2 = 1.$$

(i) Bewijs dat $D\Psi(y) = OD$, met O een orthogonale matrix en D een diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal 1, $\dfrac{r}{\cosh\tau}$, en $\dfrac{r}{\cosh\tau}$ resp.

(ii) Verifieer nu dat, voor alle $y = (r, \alpha, \tau) \in V$

$$\det D\Psi(y) = \frac{r^2}{\cosh^2\tau}.$$

(iii) Bewijs dat $\Psi : V \to U := \Psi(V)$ een injectieve afbeelding is. Toon aan dat $\Psi : V \to U$ een C^∞-diffeomorfisme van open verzamelingen in $\mathbf{R}^3$ is.

Voor gegeven $y^0 \in V$, gaan de C^∞-krommen $V_i := \{\, \Psi(y) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in V, y_j = y_j^0 \text{ voor } j \neq i \,\}$, voor $1 \leq i \leq 3$, alle door $x^0 := \Psi(y^0)$; bijvoorbeeld, V_1 is beeld onder $r \mapsto \Psi(r, \alpha^0, \tau^0)$.

(iv) Toon aan dat lokaal nabij x^0 geldt dat V_1 een rechte lijn in $\mathbf{R}^3$ is, en dat V_2 een cirkel in $\mathbf{R}^3$ is. Bewijs m.b.v. onderdeel (i) dat de raakruimten $T_{x^0}V_i$, voor $1 \leq i \leq 3$, onderling loodrecht in $\mathbf{R}^3$ zijn.

Exercise 0.3. De nulpuntsverzameling T in $\mathbf{R}^3$ van $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ met

$$g(x) = (\|x\|^2 - 5)^2 + 16(x_1^2 - 1)$$

is het oppervlak van een torus, waarvan de "buitencirkel" straal 3, en de "binnencirkel" straal 1 heeft, en die men ontstaan kan denken door wenteling om de x_1-as. Zij T_c, voor $c \in \mathbf{R}$, de doorsnijding van T met het platte vlak $\{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = \ c \,\}$, dat loodrecht staat op de x_3-as.

(i) Laat in één of meer schetsen zien (zonder dat u al rekent) dat T_c, voor $c \geq 0$, successievelijk de volgende kromme is: $\emptyset$ voor $c > 3$, punt voor $c = 3$, ovaalvorm overgaande in achtvorm voor $3 > c > 1$, achtvorm voor $c = 1$, twee ovaalvormen voor $1 > c > 0$, twee cirkels voor $c = 0$.

Enkele van deze beweringen gaan we nu bewijzen.

(ii) Bewijs $(x, c) \in T_c$ desda $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ voldoet aan $g_c(x) = 0$, waarbij

$$g_c(x) = (\|x\|^2 + c^2 - 5)^2 + 16(x_1^2 - 1).$$

Toon aan

$$x \in V_c := \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid g_c(x) = 0 \,\} \qquad \Longrightarrow \qquad |x_1| \leq 1 \quad \text{en} \quad 1 - c^2 \leq \|x\|^2 \leq 9 - c^2.$$

Concludeer dat $V_c = \emptyset$, voor $c > 3$; en $V_3 = \{0\}$.

(iii) Ga na dat $0 \in V_c$ met $c \geq 0$ impliceert $c = 3$ of $c = 1$; bewijs dat in die gevallen g_c niet submersief is in $0 \in \mathbf{R}^2$. Verifieer dat g_c submersief is in elk punt van $V_c \setminus \{0\}$, voor alle $c \geq 0$. Toon aan dat V_c een C^∞-deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is, voor elke c met $3 > c > 1$ of $1 > c \geq 0$.

(iv) Definieer

$$\phi_\pm : \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\to \mathbf{R}^2 \qquad \text{door} \qquad \phi_\pm(t) = t(\sqrt{2 - t^2}, \pm\sqrt{2 + t^2}).$$

Bewijs door snijding van V_1 met cirkels om 0 met straal $2t$ dat $V_1 = \mathrm{im}(\phi_+) \cup \mathrm{im}(\phi_-)$. Concludeer dat V_1 zichzelf doorsnijdt in 0 onder een hoek van $\frac{\pi}{2}$ radialen.