1.11 Vraagstukken

Vraagstuk 1.11.1 Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,(y-1), \quad y(0) = y_0.$$

Los dit beginwaardeprobleem op voor $y_0 \in \mathbf{R}$ en maak een schets van het totale patroon van oplossingen.

Vraagstuk 1.11.2 Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y-1}, \quad y(0) = y_0.$$

a. Los dit beginwaardeprobleem op voor $y_0 \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$. Geef ook steeds een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.

b. Beschrijf de verzameling van oplossingen meetkundig en maak een schets van het totale patroon van oplossingen. Wat gebeurt er als $y_0 \to 1$?

Vraagstuk 1.11.3 Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = (x+y-1)^3 - 1.$$

a. Herschrijf de differentiaalvergelijking tot een differentiaalvergelijking voor de nieuwe variabele $z = x + y - 1$.

b. Los de differentiaalverglijking voor z op en bepaal door terugtransformatie de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking. Geef ook steeds een maximaal interval waarop ze voldoen.

c. Maak een schets van het totale patroon van oplossingen. Bepaal hierbij ook horizontale, verticale en scheve asymptoten van de oplossingen.

Vraagstuk 1.11.4 Geef alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x\,(2-y)\frac{dy}{dx} = 2y\,(y-1).$$

Geef steeds een maximaal interval waarop ze bestaan. Maak een schets van het totale patroon van oplossingen. Ga na dat er een singulariteit optreedt!

Vraagstuk 1.11.5 Los de volgende beginwaardeproblemen op door (eventueel) een geschikte substitutie te kiezen. Bepaal tevens een zo groot mogelijk interval van geldigheid.

a. $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{y-x}, \quad y(2) = -2.$

b. $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2, \quad y(0) = 0.$

c. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}, \quad y(1) = 0.$

d. $\dfrac{dy}{dx} = 2y\,(x\sqrt{y} - 1), \quad y(0) = 1.$

e. $2x^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(2) = 4.$

f. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(0) = 1.$

Vraagstuk 1.11.6 Los de volgende beginwaardeproblemen op met de methode van variatie van constanten; pas eventueel eerst een geschikte substitutie toe.

a. $\dfrac{dy}{dx} = -2y + x, \quad y(0) = 0.$

b. $\dfrac{dy}{dx} = x\,y + 1, \quad y(1) = \sqrt{\mathrm{e}}.$

c. $x\dfrac{dy}{dx} = x + y + 1, \quad y(1) = 0.$

d. $\dfrac{dy}{dx} = -2\dfrac{y}{x} + x\,y^2, \quad y(1) = 1.$

e. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} + 1, \quad y(1) = 0.$

f. $\sin y \dfrac{dy}{dx} = 2x\,(1 - \cos y), \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

Vraagstuk 1.11.7 Geef alle oplossingen van onderstaande differentiaalvergelijkingen. Laat zien dat de oplossingen niet overal eenduidig zijn. Maak een schets van het oplossingenpatroon.

a. $\dfrac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}, \quad y \geq 0.$

b. $\dfrac{dy}{dx} = 2|y\,(1-y)|^{\frac{1}{2}}.$

c. $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$, waarin $f(y) = y\,(\ln|y|)^2$ als $y \neq 0$ en $f(0) = 0$. Merk op dat f continu is.

Vraagstuk 1.11.8 Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y\ \mathrm{e}^{2xy} + x + bx\ \mathrm{e}^{2xy}\dfrac{dy}{dx} = 0.$$

Bepaal de waarde van $b \in \mathbf{R}$ waarvoor deze differentiaalvergelijking exact is. Los de differentiaalvergelijking vervolgens op.

Vraagstuk 1.11.9 Beschouw de differentiaalvergelijking

$$4x\,y + 3y^4 + (2x^2 + 5x\,y^3)\dfrac{dy}{dx} = 0.$$

a. Toon aan dat deze differentiaalvergelijking niet exact is.

b. Bepaal $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ zodat $x^\alpha y^\beta$ een integrerende factor is.

c. Geef in impliciete vorm de oplossing met beginwaarde $y(-2) = 1$.

Vraagstuk 1.11.10 Geef de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen met behulp van een integrerende factor φ van de gegeven vorm.

a. $y^2 + xy + 1 + \left(x^2 + xy + 1\right) \dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1, \quad \varphi = \varphi(x\,y).$

b. $4x^2 + 2y + x\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad \varphi = \varphi(x).$

c. $7x^3 + 3x^2y + 4y + \left(4x^3 + x + 5y\right) \dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1, \quad \varphi = \varphi(x + y).$

Vraagstuk 1.11.11 Toon aan dat de volgende differentiaalvergelijkingen niet exact zijn en los ze op met een integrerende factor φ van de gegeven vorm. Ook met variatie van constante.

a. $\dfrac{dy}{dx} = f(y), \qquad \varphi = \varphi(y).$

b. $\dfrac{dy}{dx} = g(x)y + h(x), \qquad \varphi = \varphi(x)$. f, g, h zijn C^1 functies op $\mathbf{R}$ met $f, g \not\equiv 0$. ($f \not\equiv$ constant)

Vraagstuk 1.11.12 Beschouw de ruimte $C^0([-1, 1])$ van continue functies van $[-1, 1]$ naar $\mathbf{R}$, voorzien van de norm

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

a. Toon aan dat $\|\cdot\|_1$ inderdaad een norm definieert.

b. Toon aan dat de rij functies (f_n), gegeven door

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -1, & -1 \le x \le -\tfrac{1}{n} \\ &= nx, & -\tfrac{1}{n} \le x \le \tfrac{1}{n} \\ &= 1, & \tfrac{1}{n} \le x \le 1, \end{aligned}$$

een Cauchy-rij is ten opzichte van de gegeven norm.

c. Toon aan dat $C^0([-1, 1])$ met de gegeven norm niet volledig is.

Vraagstuk 1.11.13 Ga na dat de volgende functies $y \mapsto f(x, y)$ Lipschitz-continu zijn en bepaal een Lipschitz-constante.

a. $f(x, y) = \sin xy, \quad |x| \le a, \quad y \in \mathbf{R}.$

b. $f(x, y) = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}, \quad |x - 1| \le \dfrac{1}{2}, \quad |y - e| \le \dfrac{1}{2}e$

c. $f(x, y) = |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbf{R}.$

d. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x \in \mathbf{R}, \quad |y| \le b.$

e. $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]; \quad \varphi, \psi$ en ψ' continu.

Vraagstuk 1.11.14 Zij $\varepsilon_0 > 0$ en zij a een continue functie op $[x_0, x_0 + \varepsilon_0]$. Voor $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, zij $V = V_\varepsilon$ de ruimte van continue functies op $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Definieer, voor $y \in V$, $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$:

$$(F(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

(1) Bewijs dat $F(y) \in V$ als $y \in V$. En dat er een $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ bestaat, met de eigenschap dat voor iedere $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ de afbeelding $F : V_\varepsilon \to V_\varepsilon$ een contractie is. (Kort gezegd: F is een contractie voor ε voldoende klein.)

(2) Bewijs dat de integraalvergelijking $y(x) = (F(y))(x)$ precies één oplossing heeft. Noem deze $v(x)$.

(3) Bereken $F^2(y_0)$ met y_0 de constante functie $y_0(x) = y_0$.

(4) Bewijs dat $F^n(y_0)$ uniform convergeert voor $n \to \infty$.

(5) Bewijs $\lim_{n\to\infty}(F^n(y_0))(x) = v(x)$.

(6) Aan welke differentiaalvergelijking voldoet $v(x)$? Bereken $v(x_0)$ en geef een formule voor $v(x)$.

Vraagstuk 1.11.15 Bepaal met behulp van Picard-iteratie een benadering van de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen. Bepaal bij a – d tevens de oplossing met variatie van de constante.

a. $\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1.$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1, \quad y(1) = 1.$

c. $\dfrac{dy}{dx} = -x\,y + x^3, \quad y(0) = -2.$

d. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\,y + 1, \quad y(0) = 1.$

e. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$

Vraagstuk 1.11.16 Gegeven is de differentiaalvergelijking $dy/dx = f(x, y)$ met beginwaarde $y(x_0) = y_0$. Laat f continu zijn in x en y en bovendien Lipschitz-continu in y met Lipschitz-constante L. Laat de afbeelding F gegeven zijn op de ruimte $\mathrm{C}^0(I)$ van continue functies $u : I \to \mathbf{R}$. $I = [x_0, M]$

$$Fu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds.$$

Laat voor $\alpha \ge 0$ de norm $\|\cdot\|_\alpha$ gegeven zijn op $\mathrm{C}^0(I)$ door

$$\|u\|_\alpha = \max_{x\in I} |u(x)\, e^{-\alpha x}|, \quad u \in \mathrm{C}^0(I).$$

a. Geef een geschikte waarde voor α zodat F een contractie is ten opzichte van de norm $\|\cdot\|_\alpha$.

b. Toon aan dat het gegeven beginwaardeprobleem precies één oplossing heeft op I.

Vraagstuk 1.11.17 Bespreek de opmerking uit de tekst dat voor $n = 2$ ieder C^1 vectorveld lokaal in het definitie gebied een C^1 integrerende factor heeft, maar dat dit voor $n \geq 3$ niet meer waar is. Bekijk hierbij in het bijzonder het vectorveld $(x, y, z) \mapsto (y, 0, 1)$.