2.10 Vraagstukken

Vraagstuk 2.10.1 Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= y - 1, \\ \tfrac{dy}{dt} &= -x\,y. \end{aligned}$$

a. Ga na dat er precies één stationaire oplossing is; bepaal deze.

b. Ga na dat er een oplossing is waarvan alleen y constant is; bepaal deze.

c. Geef een differentiaalvergelijking voor de banen en los deze op.

d. Ga na welke banen gesloten zijn en dus overeenkomen met periodieke oplossingen.

e. Maak een faseplaatje.

Vraagstuk 2.10.2 Zij U de ruimte van continue functies $u : [0, a] \to \mathbf{R}$. Zij $\alpha \in \mathbf{R}$. Beschouw de afbeelding $T : U \to U$, gedefinieerd door

$$(Tu)(x) = \alpha + \int_0^x \beta(s)\, u(s)\, ds.$$

Noteer

$$B(x) = \int_0^x \beta(s)\, ds.$$

a. Bewijs dat, voor iedere $u \in U$ en $x \in [0, a]$:

$$(T^k u)(x) = \alpha \sum_{l=0}^{k-1} \frac{B(x)^l}{l!} + \int_0^x \frac{(B(x) - B(s))^{k-1}}{(k-1)!}\, \beta(s)\, u(s)\, ds$$

voor alle $k \geq 1$.

b. Bewijs dat voor iedere $u \in U$ en $x \in [0, a]$:

$$\lim_{k\to\infty} (T^k u)(x) = \alpha\ \mathrm{e}^{B(x)}\,.$$

c. Ga na dat T géén contractie is t.a.v. de supremumnorm als bijvoorbeeld $\beta(x) \geq 0$ en $\int_0^a \beta(s) ds \geq 1$. Tóch convergeert voor ieder $u \in U$, $T^k u$ voor $k \to \infty$.

d. Definieer voor $u_1, u_2 \in U$:

$$u_1 \leq u_2 \Leftrightarrow u_1(x) \leq u_2(x), \text{ voor alle } x \in [0, a].$$

Veronderstel in het vervolg dat $\beta(x) \geq 0$.

- Bewijs dat T monotoon is, in de zin dat als $u_1 \leq u_2$, dan $Tu_1 \leq Tu_2$. Neem nu aan dat $u(x) \leq \alpha + \int_0^x \beta(s)\, u(s)\, ds$ voor alle $x \in [0,\ a]$
- Bewijs dat $u \leq T^k u$ voor alle $k \geq 1$.

e. Bewijs dat $u(x) \leq \alpha\, \mathrm{e}^{B(x)}$ voor alle $x \in [0,\, a]$.

f. Veronderstel dat $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ continu is,
$\|f(x,\, y)\| \leq \beta(x)\, \|y\|$ voor alle $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n$.
Veronderstel dat $y(x)$ een oplossing is op $[0,\, a]$ van $dy/dx = f(x,\, y)$.
Bewijs dat

$$\|y(x)\| \leq \|y(0)\|\, \mathrm{e}^{B(x)}\,.$$

Vraagstuk 2.10.3 Zij $\omega \in \mathbf{R}$ een gegeven constante. Bepaal met behulp van Picard-iteratie een benadering van de oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= \omega\, y, \\ \tfrac{dy}{dt} &= -\omega\, x, \end{aligned}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 0$ en $y(0) = 1$. Laat zien (door inductie) dat aldus machtreeksen van bekende goniometrische functies ontstaan.

Vraagstuk 2.10.4 De mathematische slinger bestaat uit een massapunt met massa m, aan het eind van een staaf ter lengte l, die in een verticaal vlak beweegt, waarbij het andere eindpunt gefixeerd is in de oorsprong van het coördinatensysteem. Verondersteld wordt dat de staaf zonder wrijving kan draaien om het ophangpunt. De enige kracht die verder werkt op het deeltje is de zwaartekracht, die verticaal gericht is en grootte $m\, g$ heeft, waarbij g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt. De zwaartekracht wordt ontbonden in een component in de richting van de staaf en een component k loodrecht daarop; men neemt aan dat de eerste component wordt gecompenseerd door de reactiekracht in de staaf. Is $\phi(t)$ de hoek die de staaf ten tijde t maakt met de naar beneden gerichte verticale as, dan heeft het deeltje snelheid gelijk aan $v(t) = l\, d\phi(t)/dt$, terwijl $k = -m\, g\, \sin\phi(t)$ (maak een plaatje). De tweede wet van Newton, $k = m\, dv/dt$, leidt nu tot de tweede orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\phi. \quad (*)$$

(1) Substitueer $\omega = \sqrt{g/l}$, $\phi(t) = x(t)$ en $d\phi(t)/dt = \omega\, y$ en leid het eerste orde stelsel differentiaalvergelijkingen af in het $(x,\, y)$-vlak af, waar $x(t)$ en $y(t)$ aan moeten voldoen.

(2) Voor kleine uitwijkingen gebruiken we de benadering $\sin x \approx x$. Beschouw het stelsel $(*')$ dat verkregen wordt door $\sin x$ te vervangen door x en los dit op. Schets ook het faseplaatje.

(3) Vind een integraal (constante van beweging) voor het oorspronkelijk stelsel $(*)$. Hint: Energie?!

(4) Schets het faseplaatje van $(*)$ in de buurt van $(0,\, 0)$ en vergelijk dit met het faseplaatje voor $(*')$.

(5) Probeer ook voor $(*)$ het hele faseplaatje te schetsen.

(6) Hoe veranderen de vergelijking als er wrijving is, d.w.z. als er bij de kracht k nog een term $-c\, d\phi/dt$ wordt opgeteld? Hierin is de wrijvingscoëfficiënt c een positieve constante. Is er nog steeds een constante van beweging? Hoe ziet het faseplaatje eruit?

Vraagstuk 2.10.5 Laat

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bekijk de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt} = A_j\, y$ in het y-vlak, voor $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

a) Bepaal het rustpunt van vergelijking $\dfrac{dy}{dt} = A_j\, y$.

b) Schets het faseplaatje.

c) Bereken de stroming na tijd t (voor vaste t) $\Phi_j^t : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots$

d) Schets het beeld van het vierkantje $V = [-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$ onder de stroming Φ_j^t (voor vaste t).

Vraagstuk 2.10.6 Bekijk het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = x\, f(x^2 + y^2) - y\, g(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y\, f(x^2 + y^2) + x\, g(x^2 + y^2) \end{cases} . \qquad (*)$$

(De punt betekent differentiatie naar een tijdsvariabele t.) Hierin zijn $f,\, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continu differentieerbare functies. Het doel is een beschrijving te geven van het faseplaatje van $(*)$ in het $(x,\, y)$-vlak.

a) Voer de substitutie $x = r\, \cos\varphi$, $y = r\, \sin\varphi$ uit. Herschrijf $(*)$ in $(r,\, \varphi)$-variabelen.

b) Beschrijf, in termen van $r(t)$ en $\varphi(t)$, wat er gebeurt in de vier verschillende gebieden, die corresponderen met de tekens die de functies $f(x^2 + y^2)$ en $g(x^2 + y^2)$ aan kunnen nemen. Wat er gebeurt bij de nulpunten van één van deze functies, of van beide?

d) Beschrijf het faseplaatje van $(*)$ in het $(x,\, y)$-vlak voor $f(z) \equiv 0$ en $g(z) = \sin z$.

e) Beschrijf het faseplaatje in het $(x,\, y)$-vlak voor functies f en g met het volgende tekenverloop. $f(z) > 0$ voor $z < 4$, $f(z) < 0$ voor $4 < z < 16$, $f(z) > 0$ voor $16 < z < 25$ en $f(z) < 0$ voor $z > 25$. Verder $g(z) > 0$ voor $z < 1$, $g(z) < 0$ voor $1 < z < 9$ en $g(z) > 0$ voor $z > 9$. Wat zijn de stationaire en periodieke oplossingen? Gedragen de oplossingen zich zoals beschreven in de stelling van Poincaré-Bendixson?

Vraagstuk 2.10.7 Zij f continu differentieerbaar: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.
Bewijs dat

$$f(y) - f(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z + t(y - z))\, dt = \int_0^1 Df(z + t(y - z))\, dt\; (y - z).$$

Bewijs dat $\|f(y) - f(z)\| \leq C\, \|y - z\|$ als $\|Df(u)\| \leq C$ voor alle u op het lijnstuk tussen y en z.

Vraagstuk 2.10.8 Beschouw de Lorenzvergelijkingen (2.4.4). In de tekst wordt aangetoond dat de bol E om het punt $(0, 0, \sigma + r)$ met straal $R = (M + (\sigma + r)^2)^{\frac{1}{2}}$ alle oplossingen vangt en dat iedere oplossing die in E start er niet meer uit kan. Geef een C, in termen van σ, r, b, M met de eigenschap dat $\|Df(u)\| \leq C$ voor alle $u \in E$. Hierin is $f(u)$ het rechter lid in (2.4.4), geschreven als functie van $u = (x, y, z)$. Bewijs dat als $u(t)$ en $v(t)$ oplossingen zijn van (2.4.4) en $u(0),\ v(0) \in E$ dan is $\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0))\|\ \mathrm{e}^{c\,t}$ voor alle $t \geq 0$. Beargumenteer dat deze schatting geen zinvolle informatie bevat, zodra $Ct \geq \log(2R) - \log \|u(0) - v(0)\|$. Zelfs als $\|u(0) - v(0)\|$ 'heel klein' is, bijvoorbeeld 10^{-10}, dan gebeurt dit al binnen een afzienbare tijd.

Vraagstuk 2.10.9 Laat $y \in \mathbf{R}^n$ oplossing zijn van $dy/dt = f(t,\, y)$ met $\|f(t,\, y)\| \leq \beta(t)\, \|y\|$

(i) Toon aan $\|y(t)\| \leq \|y(0)\|\ \mathrm{e}^{\int_0^t \beta(s)\, ds}$.

(ii) Wat zegt (i) voor $t \to \infty$ voor $f(t, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} y$?

(iii) Los de differentiaalvergelijking uit (ii) op en bepaal $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Vraagstuk 2.10.10 Beschouw de vergelijking $\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & \alpha\, y_1 + {y_2}^2 \\ \dot{y}_2 & = & -y_2 + y_1\, {y_2}^4 \end{array} \right.$, waarin de punt staat voor de afgeleide naar t en α een parameter is met $\alpha < 0$.

(i) Ga na dat (0, 0) een stationair punt is.

(ii) Zij $t \mapsto y(t,\, \zeta)$ de oplossing die voor $t = 0$ gelijk is aan $\zeta \in \mathbf{R}^2$.
Schrijf

$$z_{ij}(t) = \frac{\partial y_i(t,\, \zeta)}{\partial \zeta_j}|_{\zeta=0}.$$

Geef een stelsel differentiaalvergelijkingen waar de z_{ij} aan voldoen, en los dit op. Onderzoek wat er met de oplossingen $z_{ij}(t)$ gebeurt voor $t \to \infty$.

(iii) Wat suggereert dit voor het limietgedrag voor $t \to \infty$ van $y(t,\, \zeta)$ voor kleine $\|\zeta\|$? Probeer dit te bewijzen door gebruik te maken van Gevolg 3.7.2.