

## 4.10 Vraagstukken

**Vraagstuk 4.10.1** Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 & \text{b. } \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \\ \text{c. } \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x & \text{d. } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x e^x \\ \text{e. } \frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 6y = 0. \end{array}$$

**Vraagstuk 4.10.2** Bepaal de oplossing van ieder van de volgende beginwaardeproblemen.

$$\begin{array}{l} \text{a. } \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 2 \sin x, \quad y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0. \\ \text{b. } \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 5\frac{1}{2}. \end{array}$$

**Vraagstuk 4.10.3** Geef de algemene oplossing van de vergelijking

$$\begin{array}{l} \text{(i) } u'' - 2u' + u = t e^t \\ \text{(ii) } u'' - e^t u' - e^t u = 1 \end{array}$$

**Vraagstuk 4.10.4** Beschouw de Riccati-vergelijking

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y^2 + g(x)y + f(x) = 0, \quad y(0) = y_0,$$

met  $f, g$  continu en met  $h$  continu differentieerbaar en zonder nulpunten.

a. Toon aan dat de Riccati-vergelijking overgaat in the tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(g - h^{-1}\frac{dh}{dx}\right) \frac{du}{dx} + f h u = 0$$

door de transformatie  $u(x) = e^{Q(x)}$  toe te passen, waarbij  $Q$  een primitieve is van  $h y$ . Geef bijpassende beginvoorwaarden.

b. Los op:

$$\frac{dy}{dx} + e^x y^2 + 4y - 4e^{-x} = 0, \quad y(0) = 0.$$

**Vraagstuk 4.10.5** Beschouw de differentiaalvergelijking (\*)  $\frac{dv}{dx} + v^2 = x^2 - 1$ .

(i) Toon aan dat (\*) over te voeren is in  $\Delta \quad u'' = (x^2 - 1)u$ .

(ii) Bewijs dat er coëfficiënten  $a$  en  $b$  zijn, waarvoor  $u(x) = e^{ax^2+bx}$  een oplossing is van  $\Delta$ . Bereken de oplossing  $v(x)$  van (\*) met  $v(0) = 0$ .

- (iii) Gebruik de Wronski-determinant om een eerste orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking af te leiden voor de algemene oplossing  $u(x)$  van  $\Delta$ . Geef een integraalformule voor de oplossing  $u(x)$  van  $\Delta$  met  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 1$ .
- (iv) Geef een formule voor de oplossing  $v(x)$  van  $(*)$  met  $v(0) = \alpha$ , waarin  $\alpha \neq 0$ . Bewijs dat  $v(x)$  niet voortgezet kan worden voorbij het punt  $x$ , waarvoor

$$\int_0^x e^{\xi^2/2} d\xi = -1/\alpha.$$

- (v) Onderzoek op analoge wijze de differentiaalvergelijking  $dw/dx + w^2 = x^2 + 1$ .

**Vraagstuk 4.10.6** Beschouw de differentiaalvergelijking  $Lu = f$ , met

$$Lu = a_2(t) \frac{d^2u}{dt^2} + a_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t) u$$

met  $a_i(t)$  voldoende glad en  $a_2(t) \neq 0$  voor alle  $t$ .

Veronderstel dat  $u_0$  een oplossing is van de homogene vergelijking  $Lu = 0$ , met  $u_0(t) \neq 0$  voor alle  $t$ . We gaan ‘variatie van constante’ van Lagrange toepassen om de algemene oplossing te vinden. Stel dat de oplossing  $u$  van de vorm  $u = u_0v$  is.

- Leid uit de vergelijking  $Lu = f$  een tweede orde vergelijking voor  $v$  af, in termen van  $u_0$ ,  $u_0'$  en  $f$ .
- Noem  $w = v'$  en los de verkregen differentiaalvergelijking voor  $w$  op.
- Bereken de oplossing  $u$ .
- Vergelijk dit resultaat, voor  $f = 0$ , met formule (4.5.4).
- Geef de algemene oplossing van

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4t \frac{du}{dt} + (4t^2 - 2)u = 0,$$

- Geef de algemene oplossing van

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \cos t \frac{du}{dt} + \sin t u = \cos t e^{\sin t},$$

gegeven dat  $u_0(t) = e^{\sin t}$  voldoet aan  $Lu = 0$ .

**Vraagstuk 4.10.7** Bekijk de vergelijking

$$(*_\delta) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_2(x) u = f_\delta(x),$$

waarin de functies  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  en  $f_\delta(x)$  continu als functie van  $x \in \mathbf{R}$ , terwijl  $f_\delta(x)$  ook nog van een positieve reële parameter  $\delta$  afhangt. Het doel is om te onderzoeken wat er met de oplossingen gebeurt als  $f_\delta(x)$  voor  $\delta \searrow 0$  convergeert naar een *stoot*.

We fixeren daartoe  $x_0$ ,  $a$  en  $b$  en beschouwen de oplossing  $u(x) = u_\delta(x)$  van  $(*_\delta)$  met  $u(x_0) = a$  en  $u'(x_0) = b$ . We gebruiken de speciale oplossingen  $u_1(x, \xi)$  en  $u_2(x, \xi)$  als in (4.5.7).

We nemen aan dat er constanten  $p > x_0$ ,  $A \neq 0$  en  $C > 0$  zijn, onafhankelijk van  $\delta$ , met de eigenschap dat voor iedere  $\delta > 0$ :

- (a)  $f_\delta(\xi) = 0$  als  $\xi \notin [p - \delta, p + \delta]$ ,  
 (b)  $\int f_\delta(\xi) d\xi = A$   
 (c)  $\int |f_\delta(\xi)| d\xi \leq C$ .

Tenslotte definiëren we de functie  $u_0(x)$  voor  $x \neq p$  door:

$$u_0(x) = a u_1(x, x_0) + b u_2(x, x_0) \text{ als } x < p,$$

$$u_0(x) = a u_1(x, x_0) + b u_2(x, x_0) + A u_2(x, p) \text{ als } x > p.$$

- (i) Bewijs dat  $u_0$  een continue uitbreiding heeft tot de hele reële as. Verder dat  $du_0(x)/dx$  convergeert voor  $x \searrow p$  en voor  $x \nearrow p$ . Bereken het verschil van de limieten.  
 (ii) Bewijs dat voor iedere continue functie  $g$  geldt:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{x_0}^x g(\xi) f_\delta(\xi) d\xi = 0 \text{ als } x < p,$$

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{x_0}^x g(\xi) f_\delta(\xi) d\xi = A g(p) \text{ als } x > p.$$

- (iii) Bewijs dat voor iedere  $x \neq p$  geldt dat  $u_\delta(x)$  naar  $u_0(x)$  convergeert en dat  $du_\delta(x)/dx$  naar  $du_0(x)/dx$  convergeert als  $\delta \searrow 0$ .

Probeer ook schattingen te geven voor  $u_\delta(x) - u_0(x)$  en voor  $u_\delta'(x) - u_0'(x)$ . Wat concludeert U voor  $x < p - \delta$ ?

De conclusie is dat iedere oplossing met vaste beginwaarden convergeert naar een limietoplossing. Deze is continu in het punt  $p$ , maar vertoont in  $p$  een sprong in de afgeleide.