4.10 Vraagstukken

Vraagstuk 4.10.1 Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

a. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ b. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

c. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = \mathrm{e}^x$ d. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x\ \mathrm{e}^x$

e. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0.$

Vraagstuk 4.10.2 Bepaal de oplossing van ieder van de volgende beginwaardeproblemen.

a. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2\sin x, \quad y(0) = \dfrac{dy}{dx}(0) = 0.$

b. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad \dfrac{dy}{dx}(0) = 5\dfrac{1}{2}.$

Vraagstuk 4.10.3 Geef de algemene oplossing van de vergelijking

(i) $u'' - 2u' + u = t\ \mathrm{e}^t$

(ii) $u'' - \mathrm{e}^t\ u' - \mathrm{e}^t\ u = 1$

Vraagstuk 4.10.4 Beschouw de Riccati-vergelijking

$$\frac{dy}{dx} + h(x)\,y^2 + g(x)\,y + f(x) = 0, \quad y(0) = y_0,$$

met f, g continu en met h continu differentieerbaar en zonder nulpunten.

a. Toon aan dat de Riccati-vergelijking overgaat in the tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(g - h^{-1}\frac{dh}{dx}\right)\frac{du}{dx} + f\,h\,u = 0$$

door de transformatie $u(x) = \mathrm{e}^{Q(x)}$ toe te passen, waarbij Q een primitieve is van $h\,y$. Geef bijpassende beginvoorwaarden.

b. Los op:

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{e}^x\ y^2 + 4y - 4\,\mathrm{e}^{-x} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Vraagstuk 4.10.5 Beschouw de differentiaalvergelijking $(*)$ $\frac{dv}{dx} + v^2 = x^2 - 1$.

(i) Toon aan dat $(*)$ over te voeren is in $\triangle$ $u'' = (x^2 - 1)\,u$.

(ii) Bewijs dat er coëfficiënten a en b zijn, waarvoor $u(x) = \mathrm{e}^{a\,x^2 + b\,x}$ een oplossing is van $\triangle$. Bereken de oplossing $v(x)$ van $(*)$ met $v(0) = 0$.

(iii) Gebruik de Wronski-determinant om een eerste orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking af te leiden voor de algemene oplossing $u(x)$ van $\triangle$. Geef een integraalformule voor de oplossing $u(x)$ van $\triangle$ met $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

(iv) Geef een formule voor de oplossing $v(x)$ van $(*)$ met $v(0) = \alpha$, waarin $\alpha \neq 0$. Bewijs dat $v(x)$ niet voortgezet kan worden voorbij het punt x, waarvoor

$$\int_0^x \mathrm{e}^{\xi^2/2}\, d\xi = -1/\alpha.$$

(v) Onderzoek op analoge wijze de differentiaalvergelijking $dw/dx + w^2 = x^2 + 1$.

Vraagstuk 4.10.6 Beschouw de differentiaalvergelijking $L\,u = f$, met

$$L\,u = a_2(t)\,\frac{d^2u}{dt^2} + a_1(t)\,\frac{du}{dt} + a_0(t)\,u$$

met $a_i(t)$ voldoende glad en $a_2(t) \neq 0$ voor alle t.
Veronderstel dat u_0 een oplossing is van de homogene vergelijking $Lu = 0$, met $u_0(t) \neq 0$ voor alle t. We gaan 'variatie van constante' van Lagrange toepassen om de algemene oplossing te vinden. Stel dat de oplossing u van de vorm $u = u_0 v$ is.

a. Leid uit de vergelijking $L\,u = f$ een tweede orde vergelijking voor v af, in termen van u_0, ${u_0}'$ en f.

b. Noem $w = v'$ en los de verkregen differentiaalvergelijking voor w op.

c. Bereken de oplossing u.

d. Vergelijk dit resultaat, voor $f = 0$, met formule (4.5.4).

e. Geef de algemene oplossing van

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4t\,\frac{du}{dt} + (4t^2 - 2)u = 0,$$

f. Geef de algemene oplossing van

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \cos t\,\frac{du}{dt} + \sin t\;\; u = \cos t\;\mathrm{e}^{\sin t},$$

gegeven dat $u_0(t) = \mathrm{e}^{\sin t}$ voldoet aan $L\,u = 0$.

Vraagstuk 4.10.7 Bekijk de vergelijking

$$(*_\delta) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{du}{dx} + a_2(x)\,u = f_\delta(x),$$

waarin de functies $a_1(x)$, $a_2(x)$ en $f_\delta(x)$ continu als functie van $x \in \mathbf{R}$, terwijl $f_\delta(x)$ ook nog van een positieve reële parameter δ afhangt. Het doel is om te onderzoeken wat er met de oplossingen gebeurt als $f_\delta(x)$ voor $\delta \searrow 0$ convergeert naar een *stoot*.

We fixeren daartoe x_0, a en b en beschouwen de oplossing $u(x) = u_\delta(x)$ van $(*_\delta)$ met $u(x_0) = a$ en $u'(x_0) = b$. We gebruiken de speciale oplossingen $u_1(x, \xi)$ en $u_2(x, \xi)$ als in (4.5.7).

We nemen aan dat er constanten $p > x_0$, $A \neq 0$ en $C > 0$ zijn, onafhankelijk van δ, met de eigenschap dat voor iedere $\delta > 0$:

(a) $f_\delta(\xi) = 0$ als $\xi \notin [p - \delta,\, p + \delta]$,

(b) $\int f_\delta(\xi)\, d\xi = A$

(c) $\int |f_\delta(\xi)|\, d\xi \le C$.

Tenslotte definiëren we de functie $u_0(x)$ voor $x \neq p$ door:

$$u_0(x) = a\, u_1(x,\, x_0) + b\, u_2(x,\, x_0) \text{ als } x < p,$$
$$u_0(x) = a\, u_1(x,\, x_0) + b\, u_2(x,\, x_0) + A\, u_2(x,\, p) \text{ als } x > p.$$

(i) Bewijs dat u_0 een continue uitbreiding heeft tot de hele reële as. Verder dat $du_0(x)/dx$ convergeert voor $x \searrow p$ en voor $x \nearrow p$. Bereken het verschil van de limieten.

(ii) Bewijs dat voor iedere continue functie g geldt:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, f_\delta(\xi)\, d\xi = 0 \text{ als } x < p,$$
$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, f_\delta(\xi)\, d\xi = A\, g(p) \text{ als } x > p.$$

(iii) Bewijs dat voor iedere $x \neq p$ geldt dat $u_\delta(x)$ naar $u_0(x)$ convergeert en dat $du_\delta(x)/dx$ naar $du_0(x)/dx$ convergeert als $\delta \searrow 0$.

Probeer ook schattingen te geven voor $u_\delta(x) - u_0(x)$ en voor ${u_\delta}'(x) - {u_0}'(x)$. Wat concludeert U voor $x < p - \delta$?

De conclusie is dat iedere oplossing met vaste beginwaarden convergeert naar een limietoplossing. Deze is continu in het punt p, maar vertoont in p een sprong in de afgeleide.