5.7 Vraagstukken

Vraagstuk 5.7.1 Beschouw de differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\, y$.

(i) Schrijf $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$. Geef een recurrente betrekking voor de coëfficienten a_k. Laat zien dat deze eenduidig bepaald zijn door a_0 en a_1. Bewijs dat $a_{4j+2} = a_{4j+3} = 0$ voor alle niet-negatieve gehele getallen j.

(ii) Neem aan dat $a_0 = 1$. Bewijs dat

$$a_{4j} > 16^{-j}\,(j!)^{-2} > 16^{-j}\,(\frac{j+1}{\mathrm{e}})^{-2(j+1)}.$$

(iii) Gebruik de schatting in (ii) om aan te tonen dat

$$a_{96}\, 10^{96} > \mathrm{e}^{50}\,/625.$$

Beargumenteer dat de machtreeks al voor $x = 10$ geen goede benadering meer geeft als we met 10 cijfers nauwkeurig rekenen. We delen zonder bewijs mee, dat er een getal α is, waarvoor de oplossing met $a_0 = 1$ en $a_1 = \alpha$ zich voor $x \to \infty$ asymptotisch gedraagt als een constante maal $\mathrm{e}^{-x^2/2}\, x^{-1/2}$. Voor deze oplossing is de machtreeks al helemaal ongeschikt.

Vraagstuk 5.7.2 Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaal-vergelijkingen in de vorm van een machtreeks (geef een recurrente betrekking voor de coëfficiënten).

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\dfrac{dy}{dx} + x\,y = 0.$

Vraagstuk 5.7.3 Bepaal in de vorm van een machtreeks de oplossing van het beginwaarde-probleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\,\frac{dy}{dx} + 4y = \mathrm{e}^x,$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Vraagstuk 5.7.4 Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$ door een geschikt gekozen differentiaal vergelijking op te lossen.

Vraagstuk 5.7.5 In deze opgave leiden we eigenschappen af van de functies sinus en cosinus door de vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1}$$

te bestuderen.

(a) Bepaal de oplossingen S en C van (1) die voldoen aan $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$ en $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$, door middel van een machtreeksontwikkeling. Ga na dat de reeksen op $\mathbf{R}$ convergeren.

(b) Bewijs voor alle $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{dS}{dx} = C, \quad \frac{dC}{dx} = -S, \quad S(x) = -S(-x) \quad \text{en} \quad C(x) = C(-x).$$

(c) Bewijs voor alle a, $b \in \mathbf{R}$:

$$S(a+b) = S(a)\,C(b) + C(a)\,S(b),$$

$$C(a+b) = C(a)\,C(b) - S(a)\,S(b),$$

bijvoorbeeld door aan te tonen dat het linker- en rechterlid oplossingen zijn van dezelfde beginwaardeprolemen.

(d) Bewijs dat $S^2(x) + C^2(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbf{R}$.

(e) Bewijs dat er een $a > 0$ bestaat zodat $S'(a) = C(a) = 0$

(f) Bewijs $S(x) = S(2a - x)$, $S(x) = S(x + 4a)$ en concludeer dat S en C periodiek zijn met periode $4a$.

(g) Toon aan dat ieder compact deelinterval van $\mathbf{R}$ ten hoogste eindig veel nulpunten van $S' = C$ bevat, en dat dus $S' = C$ een kleinste positief nulpunt a_0 heeft. Definieer het getal π door $\pi = 2\,a_0$ en toon aan dat S positief is op $\left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$ en kleinste periode 2π heeft.
Bepaal $S\left(\dfrac{1}{2}\pi\right)$, $S\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)$, $S\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

Vraagstuk 5.7.6 Beschouw de lineaire differentiaaloperator van Euler-type

$$L\,y = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\, \frac{d^k y}{dx^k}.$$

(a) Toon aan dat de substitutie $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$, $y(x) = u(\ln x)$, leidt tot

$$(L\,y)(x) = (M\,u)(\ln x),$$

waarin M een lineaire differentiaaloperator met constante coëfficiënten is:

$$M\,u = \sum_{k=0}^{n} b_k\, \frac{d^k u}{dt^k}.$$

Hint: bewijs met volledige inductie over $n \geq 1$ dat er coëfficënten $c_{n,k}$ zijn, waarvoor

$$y^{(n)}(x) = x^{-n} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}\, u^{(k)}(\ln x).$$

(b) Pas bovenstaande methode toe op de differentiaalvergelijking

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 7y = 0.$$

Vergelijk het antwoord met het antwoord dat we krijgen door de substitutie $y = x^r$ toe te passen.

(c) Als de operator E gedefinieerd is door $E\,y = x\,\frac{dy}{dx}$, bewijs dan dat

$$L\,y = \sum_{k=0}^{n} b_k\,E^k\,y.$$

Bewijs verder: als $y = x^r$, dan is $L\,y = f(r)\,y$, waarin $f(r) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,r^k$.

(d) Toon aan dat als $(S\,y)(x) = y(-x)$, dan is $E\,S\,y = S\,E\,y$ en $L\,S\,y = S\,L\,y$. Toon aan dat oplossingen van de differentiaalvergelijking $L\,y = 0$ van Euler gespiegeld kunnen worden: als $y(x)$ een oplossing is, dan is $y(-x)$ ook een oplossing.

Vraagstuk 5.7.7 Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x^2\,\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha\,x\,\frac{du}{dx} + \beta\,u = x^s, \quad x > 0,$$

voor iedere combinatie van de parameters α, β en r. Noteer daartoe $L\,y = x^2\,y'' + \alpha\,x\,y + \beta\,y$. Bepaal de veelterm $f(r)$, waarvoor $L\,x^r = f(r)\,x^r$. Bepaal ook $L\,(x^r\,\ln x)$ en $L\,\left[x^r\,(\ln x)^2\right]$. Geef nu alle oplossingen in de volgende gevallen:

(i) f heeft twee verschillende wortels r_1 en r_2, terwijl $s \neq r_1$ en $s \neq r_2$.

(ii) f heeft twee verschillende wortels r_1 en r_2, terwijl $s = r_1$.

(iii) f heeft twee samenvallende wortels $r = r_1 = r_2$, terwijl $s \neq r_1$.

(iv) f heeft twee samenvallende wortels $r = r_1 = r_2$, terwijl $s = r_1$.

Bepaal nu de oplossing u van $x^2\,u'' - 3x\,u' + 4u = x^2$, waarvoor $u(1) = 1$ en $u'(1) = 0$.

Vraagstuk 5.7.8 Beschouw de differentiaal vergelijking van Legendre

$$\frac{d}{dx}\,(1-x^2)\,\frac{d}{dx}\,y + \lambda_m\,y = (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda_m y = 0,$$

met $\lambda_m = m(m+1)$, $\quad m \in \mathbf{N}$.

(a) Toon aan dat de Legendre-polynomen P_m voldoen aan de orthogonaliteitsrelatie $(\lambda_n - \lambda_m)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$.

(b) Bewijs, direct uit de recurrente betrekking, dat voor de oplossing $y(x)$ de convergentiestraal gelijk is aan 1, terwijl $|y(x)| \to \infty$ voor $x \nearrow 1$, in de volgende gevallen:

(i) Als m even is $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(ii) Als m oneven is en $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(c) Een functie $f(x)$ heet *even*, resp. *oneven*, als voor iedere x geldt dat $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

Bewijs: is m even, dan is $P_m(0) \neq 0$, $P'_m(0) = 0$ en $P_m(x)$ is even, terwijl de oplossing $y(x)$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ oneven is en $|y(x)| \to \infty$ als $x \searrow -1$.

Is daarentegen m oneven, dan is $P_m(0) = 0$, $P'_m(0) \neq 0$ en $P_m(x)$ is oneven, terwijl de oplossing $y(x)$ met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ even is en $|y(x)| \to \infty$ als $x \searrow -1$.

(d) Stel $y(x)$ is een willekeurige oplossing die geen constant veelvoud is van de Legendre-veelterm. Bewijs: $|y(x)| \to \infty$, zowel voor $x \nearrow 1$ alsook voor $x \searrow -1$. De convergentiestraal van de machtreeks voor $y(x)$ is gelijk aan 1.

Vraagstuk 5.7.9 Beschouw de differentiaalvergelijking van Laguerre

$$L_\lambda\, y = x\,\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\frac{dy}{dx} + \lambda\, y = 0,$$

waarin λ een parameter is.

(i) Bepaal de recurrente betrekking tussen de coëfficiënten a_k, opdat er een functie $\phi(r)$ is waarvoor

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k,$$

met $a_0 = 1$, voldoet aan

$$L_\lambda\, y = \phi(r)\, x^{r-1}.$$

Bepaal $\phi(r)$ en bewijs dat de reeks eenduidig bepaald is en convergeert als r niet gelijk is aan een strikt negatief geheel getal.

(ii) Bepaal $r = r_0$ waarvoor $L_\lambda\, y = 0$. Laat zien dat differentiatie naar r in $r = r_0$ een tweede oplossing $z(x)$ van $L_\lambda\, y = 0$ geeft. Bewijs dat $z(x)$ geen eindige limiet heeft voor $x \searrow 0$. En bewijs dat y en z lineair onafhankelijke oplossingen zijn en dat iedere oplossing een lineaire combinatie is van y en z.

(iii) Voor welke waarden van λ heeft $L_\lambda\, y = 0$ een veelterm $y(x) \neq 0$ als oplossing? (Dit zijn de zogenaamde *Laguerre-polynomen.*)

Vraagstuk 5.7.10 Geef door middel van reeksontwikkeling (eventueel met voorfactor x^r) de oplossing van de differentiaalvergelijkingen

a. $$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

b. $$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2x\,y = 0$$

c. $$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Vraagstuk 5.7.11 Ga na wat er gebeurt als we de differentiaalvergelijking

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

met reeksontwikkeling in $x = 0$ proberen op te lossen, waarbij we zelfs nog een voorfactor van de vorm x^r toelaten.

Vraagstuk 5.7.12 Van de oplossingen $y(x)$ van de Bessel-vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})\, y = 0$$

kan het asymptotische gedrag voor $x \to \infty$ bepaald worden door toepassing van methoden uit de voorgaande hoofdstukken.

a) Als eerste stap elimineren we de eerste orde term met de Liouville-transformatie

$$y(x) = x^{-1/2}\, z(x).$$

Bewijs dat de Bessel-vergelijking equivalent is met

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = \frac{\mu}{x^2}\, z, \quad \text{waarin} \quad \mu = \nu^2 - \frac{1}{4}.$$

Voor grote x is dit een kleine storing van de differentiaalvergelijking $\zeta'' + \zeta = 0$.

b) Bewijs, gebruikmakend van variatie van constanten, dat voor $0 < a \leq x$ geldt:

$$z(x) = z(a)\, \cos(x - a) + z'(a)\, \sin(x - a) + \int_a^x \sin(x - \xi)\, \frac{\mu}{\xi^2}\, z(\xi)\, d\xi.$$

Verder, dat

$$|z(x)| \leq r + \int_a^x \frac{\mu}{\xi^2}\, |z(\xi)|\, d\xi, \quad \text{waarin} \quad r = \sqrt{z(a)^2 + z'(a)^2}.$$

En, gebruikmakend van het lemma van Gronwall, dat:

$$|z(x)| \leq r\, e^{\frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{x}} \leq r\, e^{\frac{\mu}{a}}.$$

In het bijzonder is, voor iedere $a > 0$, de functie $z(x)$ begrensd op $[a, \infty[$.

c) Bewijs dat oneigenlijke integralen

$$\int_x^\infty \sin(x - \xi)\, \frac{\mu}{\xi^2}\, z(\xi)\, d\xi, \quad \int_x^\infty \cos(x - \xi)\, \frac{\mu}{\xi^2}\, z(\xi)\, d\xi$$

convergeren. Verder dat de functie $\zeta(x)$, gedefinieerd door

$$z(x) = \zeta(x) - \int_x^\infty \sin(x - \xi)\, \frac{\mu}{\xi^2}\, z(\xi)\, d\xi, \tag{5.7.1}$$

een C^2 functie is, die voldoet aan de differentiaalvergelijking $\zeta'' + \zeta = 0$. D.w.z., er is een $\rho \geq 0$ en $\theta \in [0, 2\pi[$, waarvoor $\zeta(x) = \rho \sin(x+\theta)$.

Bewijs dat voor alle $0 < a \leq x$ geldt:

$$|z(x) - \rho \sin(x+\theta)| \leq \frac{\mu\, r}{x}\, \mathrm{e}^{\mu/a}\,.$$

Voor de Bessel-functie $y(x)$ geeft dit:

$$y(x) = \rho\, x^{-1/2} \sin(x+\theta) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \quad \text{als} \quad x \to \infty.$$

d) Bewijs:

$$z'(x) = \rho \cos(x+\theta) - \int_x^\infty \cos(x-\xi)\, \frac{\mu}{\xi^2}\, z(\xi)\, d\xi,$$

$$|z'(x) - \rho \cos(x+\theta)| \leq \frac{\mu\, r}{x}\, \mathrm{e}^{\mu/a}, \quad 0 < a \leq x,$$

$$y'(x) = \rho\, x^{-1/2} \cos(x+\theta) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \quad \text{als} \quad x \to \infty.$$

e) Zij $a > \mu$. Bewijs dat

$$\left(1 - \frac{\mu}{a}\right) \sup_{x \geq a} |z(x)| \leq \rho.$$

Bewijs hiermee dat de ‘limietamplitude’ ρ niet gelijk is aan nul, als $y(x)$ niet de nuloplossing is van de Bessel-vergelijking.

f) Men kan de integraalvergelijking 5.7.1, met $\zeta(x) = \rho \sin(x+\theta)$, lezen in de vorm $z = T(z)$, waarbij T de operator is die aan z de functie in het rechterlid toevoegt. Iteratie geeft voor ieder natuurlijk getal k dat $z = T^k(z)$. Hierin is het rechterlid een functie die expliciet in termen van ρ en θ is uit te rekenen, plus een restterm, die van de orde $1/x^k$ is. Werk dit uit voor $k = 2$.