Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

# OefenTentamen 2 Kansrekening 2009

1. Zij $X$ een exponentieel verdeelde stochast met parameter $\alpha$ (d.w.z. $X$ heeft dichtheid $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$ an 0 elders), en $Y$ een exponentieel verdeelde stochast met parameter $\beta$. Veronderstel dat $X$ en $Y$ onafhankelijk zijn.

   (a) Laat zien dat $P(X > Y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

   (b) Laat zien dat $Z = \min(X, Y)$ exponentieel verdeeld is met parameter $\alpha + \beta$.

   (c) Bepaal de dichtheid van $X + Y$.

2. Stel dat we beschikken over een dataset $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die we opvatten als een realisatie van onafhankelijke discrete stochasten met dezelfde kansmassafunctie. Stel dat iedere $X_i$ binomiaal verdeeld is met parameters $m$ en $p$ met $p$ onbekend.

   (a) Bepaal de maximum likelihood schatting van $p$ op basis van de dataset $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

   (b) Wat is de maximum likelihood schatter van $p$.

   (c) Bepaal een zuivere schatter van $p$

3. Stel dat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijk en uniform verdeeld op $[0, 1]$ zijn. Definieer $Y_n$ door:

$$Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

   (a) Bepaal de verdelingsfunctie van $Y_n$.

   (b) Bepaal $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \dfrac{n}{2})$.

   (c) Laat zien dat $P(|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{1}{2}| > 1/2) \leq \dfrac{1}{3n}$.

4. Beschouw een Poisson process met parameter $\lambda$ en aankomsttijden $X_1, X_2, \cdots$. Noteer met $N[s, t]$ het aantal aankomsten in het interval $[s, t]$.

   (a) Bepaal de conditionele kans $P(N[0, 3] = 2|N[0, 1] = 1)$.

   (b) Bepaal $P(X_1 + X_2 \leq 1)$.

   (c) Bepaal de conditionele kans $P(X_1 < 1 < X_2 < 2 \,|\, N[0, 2] = 2)$.