



OefenQuiz Kansrekening 2009

1. James Bond zoekt een brief in één van de drie ladenkasten in het voormalige kantoor van de Secretaris-Generaal (in de kelder van een oud klooster in Moskou) en weet zeker dat de brief zich in één van de drie kasten bevindt. We nemen aan dat de brief zich met gelijke kans in elk van de drie kasten bevindt. Laat p_i de kans zijn dat, gegeven dat de brief zich in kast $i \in \{1, 2, 3\}$ bevindt, Bond de brief zal vinden als hij kast i vluchtig doorzoekt. Hij heeft net de tijd om in kast 1 te kijken, maar ziet de brief niet.

Toon aan dat de kans dat de brief toch in kast 1 zit, gelijk is aan

$$\frac{1 - p_1}{3 - p_1}.$$

2. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p , d.w.z.

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

en

$$P(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) = P(X = k)P(Y = j), \quad k, j = 1, 2, \dots$$

Het minimum van X en Y geven we aan met Z , dus $Z = \min\{X, Y\}$.

- (a) Laat zien dat $P(Z = k) = p(2 - p)(1 - p(2 - p))^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Concludeer dat X geometrisch verdeeld is met parameter $p(2 - p)$.
- (b) Laat zien dat als $n > k$, dan

$$P(\{X = n\}|\{Z = k\}) = \frac{p}{2 - p}(1 - p)^{n-k}.$$

3. We werpen met N zuivere dobbelstenen. Hierbij is N een stochastische variabele met $P(N = n) = 2^{-n}$ voor $n \geq 1$. Laat S de som van het aantal geworpen ogen zijn.
- (a) Bepaal $P(S = 3|N = 2)$.
- (b) Bepaal $P(S = 3)$.
- (c) Bepaal $P(N = 2|S = 3)$.

4. We willen inzicht krijgen in de levensduur van 60 watt lampen van een bepaald merk. Door allerlei oorzaken is de levensduur van de lampen verschillend. Nu willen we bijvoorbeeld weten of een willekeurige lamp meer dan 1000 uur zal branden. We besluiten om de levensduur te modelleren met behulp van een kansmodel. Definieer de stochast X als de levensduur van een willekeurige lamp van het betreffende merk in eenheden van 1000 uur.

Iemand kiest het volgende model: X heeft een kansdichtheidsfunctie f die gelijk is aan $f(x) = K(e^x - 1)$ op het interval $[0,4]$ en gelijk aan 0 is daarbuiten, waarbij K een constante is.

- (a) Bereken K .
 - (b) Bepaal de verdelingsfunctie van X .
 - (c) Bereken de kans dat een willekeurige lamp van het betreffende merk meer dan 1000 uur zal branden.
 - (d) Bepaal de verwachting $E(X)$ en variantie $\text{Var}(X)$ van X .
 - (e) Bepaal de verdelingsfunctie van de stochast $Y = \sqrt{X}$.
 - (f) Bepaal de kansdichtheidsfunctie van Y .
5. Zij U een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$. Simuleer (d.w.z. construeer met behulp van U) de volgende stochasten.
- (a) Een geometrisch verdeelde stochast X met parameter p , $0 < p < 1$.
 - (b) Een continue stochast X met kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{4}{45}x^{1/3}$ als $x \in [1, 8]$, en 0 anders.